

Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie.

(Von Herrn A. Clebsch zu Giessen.)

Die Anwendungen, welche die elliptischen Functionen in der Geometrie bisher gefunden haben, sind, obwohl auf ganz wenige unter den möglichen Fällen beschränkt, dennoch schon zahlreich genug, um den allgemeinen Charakter derselben hervortreten zu lassen. Alle diese Anwendungen gehen von der Theilung aus, und zeigen, wie die Lösungen von gewissen in der Geometrie auftretenden algebraischen Gleichungen mit Hülfe der Theilung der elliptischen Functionen einfach dargestellt werden können. Dies ist um so mehr werth, als jene Gleichungen selbst ihrer verwickelten Form wegen im Allgemeinen sehr schwer aufzustellen sind; nicht minder aber deswegen, weil die eigenthümlichen Beziehungen und Gruppierungen der Wurzeln unter einander dabei aufs klarste hervortreten. Dass *Steiner* in so vielen Fällen diesen Beziehungen nachzugehen gewusst hat, und dass viele von ihm gelöste Probleme durch die Theorie der elliptischen Functionen erst ihre wahre analytische Ausdrucksweise finden, ist nicht die geringste der merkwürdigen Thatsachen, welche uns bei dem Studium der Schriften dieses grossen Geometers mit stets wachsender Bewunderung erfüllen.

Aehnliche Anwendungen der Theorie der *Abelschen* Functionen vorzuführen, ist der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes; und ich glaube, dass die darzulegen den wenigen Principien dazu dienen können, das Studium der algebraischen Curven in vieler Beziehung zu erleichtern. Dass solche Anwendungen bisher nicht versucht sind, obgleich wir seit sechs Jahren *Riemanns* Theorie dieser Functionen besitzen, ist ohne Zweifel grossentheils den Schwierigkeiten zuzuschreiben, welche dem Verständnisse der betreffenden Abhandlungen noch immer entgegenstehen, und welche auch durch die neueren Bemühungen jüngerer Mathematiker nicht ganz gehoben sind. Ein anderer Grund liegt darin, dass man bei diesen Anwendungen zu derjenigen Anschauungsweise der Natur dieser Functionen zurückkehren muss, welche *Jacobi* im 9^{ten} und 13^{ten} Bande dieses Journals aufgestellt hat, und welche sich bei Herrn *Riemann* durch eine andere ersetzt findet, obwohl für den Uebergang

zu der *Jacobischen* Anschauungsweise das nöthige Material gegeben ist. Man kann sagen, dass bei *Jacobi* die gegenseitige Abhängigkeit zweier Reihen von gleich viel Variabeln in den Vordergrund tritt, während es sich bei Herrn *Riemann* vorzugsweise um eine Reihenentwicklung handelt. Ich werde im Folgenden immer von der Vorstellungsweise, wie *Jacobi* sie benutzt, Gebrauch machen. Die von der Theorie der *Abelschen* Functionen gemachten Ausführungen (von Herrn *C. Neumann*^{*)} und Herrn *Prym*^{**)}), scheinen sogar zu zeigen, dass dieser *Jacobische* Standpunkt den nothwendigen Durchgangspunkt bildet, und dass alle Entwicklungen zuerst in der von *Jacobi* vorausgesagten Form auftreten, selbst wenn man, wie Herr *Prym* thut, dieselbe zu vermeiden bestrebt ist.

Die geometrischen Anwendungen dieser Theorie, welche im Folgenden angebahnt werden, sind so zahlreich, dass ich nur einige Fälle näher auszuführen

versucht habe. Diese Ausführungen beziehen sich namentlich auf die Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung und enthalten unter anderen eine Lösung des Problems der Doppeltangenten, welche sich durch eine aus der Natur der Sache fließende übersichtliche Gruppierung dieser merkwürdigen Geraden empfiehlt. Dabei ergeben sich fast von selbst eine Reihe von Sätzen, welche *Hesse* und *Steiner* im 49^{ten} Bande dieses Journals angegeben haben, und auf welche *Hesse* seine elegante Deutung der zwischen den 28 Doppeltangenten eintretenden Beziehungen durch die Verbindungslinien von 8 Punkten im Raume gegründet hat. Es liegt in der Natur der hier angewandten Methoden, dass alle diese Sätze als ganz specielle Fälle von anderen, sehr allgemeinen, erscheinen, welche nicht bloss für ebene Curven beliebiger Ordnung, sondern auch für alle doppelt gekrümmten Curven in gleicher Weise ihr Geltung behalten.

§. 1.

Zusammenhang einer Curve n^{ter} Ordnung mit einer Classe von Abelschen Integralen.

Jede algebraische Gleichung $F(s, z) = 0$, vermöge deren s als Function von z bestimmt ist, begründet nach Herrn *Riemann* eine Classe von *Abelschen* Integralen. Aus den überall endlich bleibenden Integralen, welche man dabei erhält, setzen sich die Argumente von θ -Functionen auf lineare Weise zusammen. Nimmt man die p Argumente einer θ -Function als bekannt an,

*) Die Umkehrung der *Abelschen* Integrale, Halle 1863.

**) *Theoria nova ff. ultraellipticarum*, Diss. Berlin 1863.

so entsprechen denselben p Werthe von z , welche die oberen Grenzen der constituirenden Integrale bilden; und dieselben, oder irgend welche algebraische Functionen derselben, bestimmen sich als Wurzeln einer Gleichung p^{ten} Grades, deren Coefficienten sich aus θ -Functionen rational zusammensetzen. Die Zahl p wird mit Hülfe der Formel

$$p = \frac{w}{2} - (n - 1) \text{ *)}$$

gefunden; dabei ist n der Grad, bis zu welchem s in der gegebenen Gleichung ansteigt, w aber die Zahl der Werthsysteme, für welche $F'(s) = 0$, ohne dass $F'(z) = 0$. Dabei wird vorausgesetzt, dass für diejenigen Werthsysteme, wo $F'(s) = 0$ und $F'(z) = 0$, nicht $F''(ss).F'''(zz) - F''(sz)^2 = 0$ sei.

Herr *Riemann* legt die Gleichung $F(s, z) = 0$ zu Grunde in der Form, dass, wenn man die Gleichung nach Potenzen von s ordnet, jeder Coefficient von gleich hoher Ordnung für z sei. Für die geometrische Anwendung ist es zweckmässig, eine andere Form als allgemeine Grundform zu betrachten, nämlich diejenige, welche durch Substitution von $-\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}{b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3}$ für z , $-\frac{\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3}{\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3}$ für s in eine homogene Function n^{ter} Ordnung der drei

Veränderlichen x_1, x_2, x_3 übergeführt werden kann, wo die a, b, α, β beliebige Constante bezeichnen.

Sei die so entstehende Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (1.)$$

die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung. Die Reduction dieser Gleichung auf die Form

$$F(s, z) = 0 \quad (2.)$$

mit Hülfe der Gleichungen

$$\begin{cases} (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + z(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0, \\ (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3) + s(\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3) = 0 \end{cases} \quad (3.)$$

entspricht dann der Darstellung der Curve als Durchschnitt entsprechender Strahlen der Büschel (3.), in denen s, z die veränderlichen Parameter bilden. Untersuchen wir, wie gross die Zahl w hienach wird.

Wenn $F's = 0$, ohne dass $F'z = 0$, so hat die Gleichung z zwei gleiche Wurzeln; zwei aufeinanderfolgenden Strahlen des ersten Büschels entspricht

*) Band 54 dieses Journals p. 129.

einer des zweiten. Mit anderen Worten, ein Strahl des zweiten Büschels wird Tangente der Curve. Der Fall $F''s = 0, F'''s = 0$ etc. ist leicht zu berücksichtigen; die Tangente berührt dann in höherer Ordnung. Aber dies kann nur für besondere Werthe der a, b, α, β eintreten.

Wenn $F'(s) = 0$ und $F'(z) = 0$, so ist auch

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0;$$

die Curve hat dann einen Doppelpunkt. Dass die Bedingung

$$F''(ss).F''(zz) - F''(sz)^2 = 0$$

ausgeschlossen ist, bedeutet, dass kein Doppelpunkt ein Rückkehrpunkt werden solle*).

Ist also die Zahl der Doppelpunkte gleich d , so hat man nach einer bekannten Formel für die Zahl der Tangenten,

$$w = n.(n - 1) - 2d.$$

Daher

$$p = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - d. \quad (4.)$$

Dieses ist also die Zahl, welche die Classe der zu einer Curve n^{ter} Ordnung gehörigen Abelschen Functionen angiebt.

So entsprechen die elliptischen Functionen ($p = 1$) den allgemeinen Curven dritter Ordnung, den Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten etc.;

die erste Classe der *Abelschen* Transcendenten den Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt, oder denen fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten etc.; die folgende Classe ($p = 3$) den allgemeinen Curven vierter Ordnung etc.

Nach der Theorie der *Abelschen* Functionen findet man z mit Hülfe einer Gleichung p^{ten} Grades durch θ -Functionen ausgedrückt. Die erste Gleichung (3.) lehrt also, wenn die p Argumente der θ als bekannt vorausgesetzt werden, eine lineare Relation zwischen den Coordinaten eines Punktes kennen; das zu z gehörige s , dessen Ausdruck man aus dem von z und aus seinen nach den Argumenten der θ -Functionen genommenen Differentialquotienten ableitet, liefert eine zweite, und man kann endlich die Coordinaten einer Curve so durch θ -Functionen ausdrücken, wobei, neben der allgemeinen Theorie der

*) Diese Beschränkung lässt sich, wie es scheint, aufheben, indem man festsetzt, dass für jeden Rückkehrpunkt zugleich die Zahl der Tangenten um eine vermehrt werden solle.

betreffenden *Abelschen* Functionen, nur die Auflösung einer einzigen Gleichung p^{ten} Grades gefordert wird.

Die überall endlichen Integrale, aus denen die Argumente der θ -Functionen sich zusammensetzen, kann man nach *Riemann* (a. a. O. pag. 131.) und mit Hülfe der Gleichungen

$$\frac{x_2 dx_3 - x_3 dx_2}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{\frac{\partial f}{\partial x_3}}$$

in die Form bringen:

$$\int \Theta \cdot \frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}},$$

wobei Θ eine ganze homogene Function der Ordnung $n - 3$ ist, welche für die Doppelpunkte der Curve verschwindet, und wo zwischen den x die Gleichung $f = 0$ bestehend angesehen wird. Die c , welche der Symmetrie wegen eingeführt sind (vergl. *Aronhold*, Monatsber. der Berl. Acad., Sitzung vom 25. April 1861), haben auf das Integral gar keinen Einfluss, indem die Grösse unter dem Integralzeichen in Wahrheit von denselben unabhängig ist. Die zweckmässige Wahl der unteren Grenzen so wie der in den Θ auftretenden Coefficienten hat Herr *Riemann* gelehrt; ich werde beides so voraussetzen, wie es in der zweiten Abtheilung der angeführten Abhandlung gegeben ist.

§. 2.

Anwendung des Abelschen Satzes auf den Durchschnitt zweier Curven.

Der *Abelsche* Satz (Band 4 pag. 200 dieses Journals) kann nun, mit Zugrundelegung homogener Gleichungen statt der von *Abel* benutzten, in einer Weise

ausgesprochen werden, welche wichtige Folgerungen gestattet. Ich werde den Beweis hinzufügen, wie derselbe sich bei der angegebenen Modification gestaltet.

Es sei $f = 0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung, $\varphi = 0$ die einer anderen Curve m^{ter} Ordnung. Es sei ferner Θ eine beliebige rationale homogene Function $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung. Betrachten wir die Summe

$$\Sigma \int \Theta \cdot \frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}},$$

ausgedehnt über alle diejenigen Punkte als obere Grenzen der Integrale, welche das Schnittsystem von $f = 0$, $\varphi = 0$ bilden.

Unter dem Integralzeichen genügen die x keineswegs der Gleichung $\varphi = 0$, sofern dieselbe eine bestimmte Curve repräsentirt; aber wir können die Gleichung $\varphi = 0$ bestehend annehmen, indem wir ihre Coefficienten als Variable einführen, welchen erst in den Grenzen die betreffenden gegebenen Werthe beizulegen sind.

Multiplicirt man nun unter dem Integralzeichen Zähler und Nenner mit $\Sigma \pm k_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$, wo die k beliebige Grössen sind, so findet man im Zähler die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \Sigma k_i c_i, & \Sigma k_i x_i, & \Sigma k_i dx_i \\ \Sigma c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, & \Sigma x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, & \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \\ \Sigma c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & \Sigma x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i \end{vmatrix}.$$

Von den Elementen dieser Determinante verschwinden drei; das letzte wird gleich $-\delta\varphi$, wenn $\delta\varphi$ dasjenige bedeutet, was aus φ durch Differentiation der Coefficienten entsteht; und man hat endlich als Werth der Determinante:

$$\Sigma c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Sigma k_i x_i \cdot \delta\varphi,$$

so dass die gesuchte Summe übergeht in

$$\Sigma \int \Theta \cdot \frac{\Sigma k_i x_i}{\Sigma \pm k_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}} \cdot \delta\varphi.$$

Hier sind jetzt die Incremente der einzelnen Coefficienten von φ in rationale Functionen der Coordinaten der verschiedenen Punkte multiplicirt, welche den Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ zusammen genügen. Sämmtliche Punkte kommen in diesen Functionen symmetrisch vor; man kann dieselben daher als rationale Functionen der Coefficienten von f und φ darstellen; und indem man nach letzteren integrirt, erhält man, neben rationalen Functionen der Coefficienten nur logarithmische und Kreisfunctionen von solchen. Dies ist der *Abelsche Satz*.

Bemerken wir nun insbesondere, dass, wenn Θ zugleich eine *ganze* Function ist, die Summe der unter dem Integralzeichen stehenden Functionen immer verschwindet. Indem man nämlich das von *Jacobi* (Band 14 dieses

Journals p. 286) ausgesprochene Theorem auf homogene Gleichungen anwendet, und zugleich bemerkt, dass, wenn $f = 0$, $\varphi = 0$, auch:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{x_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}}{x_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{x_3},$$

so erhält man die Formel:

$$\Sigma \frac{\Omega(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)}{\Sigma \pm k_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}} = 0,$$

wo Ω eine ganze homogene Function der Ordnung $m + n - 3$ ist, und wo die Summe sich auf alle Werthsysteme bezieht, welche den Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ gleichzeitig genügen. Da nun $\Theta \cdot \delta \varphi$ von der Form Ω ist, sobald Θ , welches von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung war, eine *ganze* Function bedeutet, so wird die obige Integralsumme dann constant, d. h. von den Coefficienten von φ unabhängig

Man hat also folgenden Satz:

Bedeutet $f = 0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung, und wird das Integral

$$\int \Theta \cdot \frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}},$$

in welchem Θ eine homogene Function $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, so gebildet, dass man die x durch die Gleichung $f = 0$ von einander abhängig macht, so ist die Summe aller Werthe des Integrals für die Schnittpunkte von $f = 0$ mit einer anderen Curve $\varphi = 0$ (m^{ter} Ordnung) als Aggregat von rationalen und von Logarithmen rationaler Functionen der Coefficienten von φ darstellbar; insbesondere aber ist diese Summe von den Coefficienten von φ unabhängig, sobald Θ zugleich eine ganze Function ist.

Da Θ , wenn es eine ganze Function ist, noch $\frac{n-1.n-2}{2}$ willkürliche Coefficienten enthält, so erhält man hieraus ebensoviel einzelne Gleichungen, welche Summen von mn Integralen Constanten gleich geben. Diese $\frac{n-1.n-2}{2}$ Gleichungen enthalten in keiner Weise die Coefficienten von φ ; sie sind daher überhaupt die Bedingungen dafür, dass mn Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen. Ist $m \geq n$, so ist bekanntlich die Anzahl

der hierzu erforderlichen Bedingungen genau gleich $\frac{n-1.n-2}{2}$ *); ist aber m kleiner als n , so ist die Anzahl der erforderlichen Bedingungen:

$$mn - \frac{m.m+3}{2},$$

und da

$$\left(mn - \frac{m \cdot m + 3}{2}\right) - \frac{n - 1 \cdot n - 2}{2} = -\frac{n - m - 1 \cdot n - m - 2}{2},$$

so ist auch noch für $m = n-1$, $m = n-2$ die Anzahl der erhaltenen Gleichungen der Anzahl der erforderlichen Bedingungen gleich. Ist $m < n-2$, so wird die Zahl der Bedingungsgleichungen grösser; dieselben können aber nicht aufhören mit einander verträglich zu sein, und die hinreichende Anzahl von Bestimmungen zu ersetzen.

Wenn die betrachtete Curve keinen Doppelpunkt besitzt, also im Allgemeinen, bestehen die durch das Theorem gegebenen Gleichungen nur zwischen überall endlich bleibenden Integralen, wie sie bei der Bildung der Argumente der Θ -Functionen gebraucht werden. Dieser allgemeine Fall soll zunächst behandelt werden. Existiren Doppelpunkte, so sind in ebensoviel Gleichungen die Integrale nicht mehr unter diese Kategorie gehörig.

§. 3.

Bestimmung der Constanten des Abelschen Satzes, und Umkehrung des Satzes über die Schnittpunkte algebraischer Curven.

Setzen wir im Folgenden voraus, die Curve besitze keinen Doppelpunkt. Aus diesem Fall können alle anderen als specielle abgeleitet werden. Wir haben $p = \frac{n - 1 \cdot n - 2}{2}$; die überall endlich bleibenden Integrale bezeichnen wir durch

$$u_1, \quad u_2, \quad \dots \quad u_p,$$

und unterscheiden das verschiedenen Punkten angehörige durch obere Indices. Die u sollen so bestimmt sein, wie sie Herr *Riemann* zur Bildung der Argumente der θ -Functionen verwendet; dadurch sind einerseits die unteren Grenzen bestimmt, andererseits ist festgesetzt, welche Veränderungen die u durch Aenderung des Integrationsweges erfahren, dass sie nämlich bei gleichbleibender oberer Grenze dadurch nur übergeführt werden können in

*) *Jacobi*, dieses Journal Band 15. pag. 285.

das System:

$$u_1 + A_1, \quad u_2 + A_2, \quad \dots \quad u_p + A_p,$$

wo, wie immer im Folgenden, die A ein System der Form

$$\begin{cases} A_1 = m_1 i\pi + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1p}q_p, \\ A_2 = m_2 i\pi + a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2p}q_p, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_p = m_p i\pi + a_{p1}q_1 + a_{p2}q_2 + \dots + a_{pp}q_p \end{cases} \quad (5.)$$

bezeichnen. In diesen Ausdrücken sind die a durch die Curvengleichung gegeben, die m, q aber bedeuten ganze Zahlen.

Die Gleichungen des Theorems gehen dann in folgende Form über:

$$\begin{cases} u'_1 + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{(mn)} \equiv \gamma_1, \\ u'_2 + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{(mn)} \equiv \gamma_2, \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u'_p + u_p^{(2)} + \cdots + u_p^{(mn)} \equiv \gamma_p. \end{cases} \quad (6.)$$

Da die Curve m^{ter} Ordnung aus m Geraden bestehen kann, so muss man jede dieser Gleichungen dadurch bilden können, dass man die m entsprechenden Gleichungen addirt, welche für $m = 1$ bestehen. Man hat daher, wenn $c_1, c_2, \dots c_p$ die zu $m = 1$ gehörigen Constanten γ bedeuten, sogleich

$$\gamma_1 = mc_1, \quad \gamma_2 = mc_2, \quad \dots \quad \gamma_p = mc_p.$$

Die Constanten c sind dann nicht bloß von den Coefficienten sondern auch von dem Grade der Curve $\varphi = 0$ unabhängig. Ich werde jetzt zeigen, dass die c sämmtlich gleich Null gesetzt werden können.

Hiezu führt die Betrachtung des Falles $m = n - 3$. Herr *Riemann* nämlich hat a. a. O. p. 148 bewiesen, dass ein System der obigen Art congruent mit lauter Nullen ist, sobald es ausgedehnt wird über die gemeinschaftlichen Lösungen von $f = 0$ mit denjenigen Gleichungen, deren linker Theil aus den Zählern der in den u integrierten Functionen linear zusammengesetzt ist, etwaige Doppelpunkte ausgeschlossen, welche hier von vorn herein nicht vorkommen. Nun ist eine lineare Function der Zähler der integrierten Ausdrücke eine allgemeine homogene Function $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung (Θ); für $m = n - 3$ ist also $(n - 3)c_h = 0$, also immer $c_h = 0$. Man hat daher folgenden Satz:

Bildet man die überall endlichen Integrale mit den von Herrn Riemann angegebenen unteren Grenzen, und bildet die Summen solcher Integrale

für die Durchschnittspunkte der Curve $f = 0$ mit einer anderen, so ist das System der erhaltenen Integralsummen jederzeit einem System von Nullen congruent.

Dieser Satz gestattet die Umkehrung und lautet dann so:

Sobald die Summen der über $m.n$ Punkte ausgedehnten überall endlichen Integrale Null sind, liegen die $m.n$ Punkte im Durchschnitt einer Curve m^{ter} Ordnung mit der Curve n^{ter} Ordnung.

Die Differentialgleichungen nämlich:

$$\begin{aligned} du'_1 + du_1^{(2)} + \cdots + du_1^{(mn)} &= 0, \\ du_2^{(1)} + du_2^{(2)} + \cdots + du_2^{(mn)} &= 0, \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ du_p^{(1)} + du_p^{(2)} + \cdots + du_p^{(mn)} &= 0 \end{aligned}$$

werden durch p algebraische Gleichungen, welche der *Abelsche* Satz giebt, vollständig integrirt. Die p Integrale enthalten p willkürliche Constanten. Da die

Differentialgleichungen ferner durch solche algebraische Gleichungen integrirt werden, welche aussagen, dass die mn Punkte auf einer Curve m^{ter} Ordnung liegen, so müssen diese letzteren aus jenen durch eine specielle Wahl der willkürlichen Constanten ableitbar sein, und wenn man solche Werthe der Constanten festhält, so müssen die algebraischen Integrale eben jene Gestalt haben, in welcher sie die mn Punkte als den Durchschnittspunkt einer Curve m^{ter} Ordnung mit der gegebenen charakterisiren. Die erforderliche Constantenbestimmung ist aber oben geleistet worden.

§. 4.

Berührungscurven, welche durch eine Anzahl auf der Curve gegebener Punkte bestimmt sind.

Mit Hülfe der entwickelten Sätze ergibt sich leicht die Lösung folgender Aufgabe:

Es sei $m \geq n - 2$; auf der Curve n^{ter} Ordnung sind $mn - pr$ Punkte beliebig gegeben; man soll durch sie eine Curve m^{ter} Ordnung legen, welche die Curve n^{ter} Ordnung in p Punkten r -punktig berührt.

Diese Aufgabe ist lösbar, wenn $m \geq n - 2$. Sie ist auch bestimmt, wenn $m = n - 2$ oder $m = n - 1$. Denn in beiden Fällen ist die Anzahl der gestellten Bedingungen, nämlich $mn - pr + p(r - 1)$ gleich der Zahl der in der Curvengleichung enthaltenen Constanten. Ist $m \geq n$, so ist die Zahl der Bedingungsgleichungen $(mn - p)$ nach einem bereits erwähnten Satze eben ausreichend

um das Punktsystem zu bestimmen, welches die Curve m^{ter} Ordnung mit der Curve n^{ter} Ordnung gemein haben muss; aber es erfüllt sodann die gestellten Bedingungen jede Curve m^{ter} Ordnung, welche durch die gefundenen Punkte hindurchgeht.

Setzen wir der Kürze wegen $mn - pr = \lambda$. Von den Schnittpunkten beider Curven sind dann λ gegeben, von den übrigen pr sollen je r zusammenfallen. Die Summen entsprechender Integrale, welche den gesuchten Berührungspunkten zugehören, seien $v_1, v_2, \dots v_p$; die Gleichungen (6.) nehmen dann die Gestalt an:

$$\begin{aligned} rv_1 &\equiv -(u'_1 + u_1^{(2)} + \dots + u_1^{(\lambda)}), \\ rv_2 &\equiv -(u'_2 + u_2^{(2)} + \dots + u_2^{(\lambda)}), \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ rv_p &\equiv -(u'_p + u_p^{(2)} + \dots + u_p^{(\lambda)}). \end{aligned}$$

Die rechten Theile dieser Congruenzen sind gegeben; durch Division mit r findet man, indem man der Allgemeinheit wegen rechts ein willkürliches System der

A , durch r dividirt, hinzufügt:

$$\begin{cases} v_1 \equiv -\frac{u'_1 + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{(\lambda)}}{r} + \frac{A_1}{r}, \\ v_2 \equiv -\frac{u'_2 + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{(\lambda)}}{r} + \frac{A_2}{r}, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_p \equiv -\frac{u'_p + u_p^{(2)} + \cdots + u_p^{(\lambda)}}{r} + \frac{A_p}{r}. \end{cases} \quad (7.)$$

Bildet man jetzt die θ , deren Argumente eben diese v sind, und die zugehörige Gleichung p^{ten} Grades, so findet man durch Auflösung die p Punkte, welche in den v als obere Grenzen vorkommen, d. h. die p Berührungspunkte, wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Die A enthalten die $2p$ Zahlen m, q , denen noch alle Werthe von 0 bis $r-1$ beigelegt werden können. *Die Anzahl aller Lösungen des Problems ist daher r^{2p} .*

Die r^{2p} Systeme von je p Berührungspunkten haben eine sehr merkwürdige Lage gegen einander. Unterscheidet man r solcher Systeme, von denen auch mehrere gruppenweise zusammenfallen können, durch beigeetzte obere Indices, und addirt die entsprechenden Gleichungen (7.), so erhält man

für $k = 1, 2, \dots p$:

$$v_k^{(1)} + v_k^{(2)} + \cdots + v_k^{(r)} + u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{(\lambda)} \equiv \frac{A_k^{(1)} + A_k^{(2)} + \cdots + A_k^{(r)}}{r}. \quad (8.)$$

Bestimmt man also die in den A vorkommenden Zahlen m, q so, dass

$$\begin{cases} m_k^{(1)} + m_k^{(2)} + \cdots + m_k^{(r)} \equiv 0 \pmod{r}, \\ q_k^{(1)} + q_k^{(2)} + \cdots + q_k^{(r)} \equiv 0 \pmod{r}, \end{cases} \quad (9.)$$

so kann man statt der rechten Seite von (8.) Null setzen, und es findet sich also, dass die r Systeme von Berührungspunkten mit den gegebenen Punkten in einer Curve m^{ter} Ordnung liegen. Aus (9.) sieht man, dass von den r Systemen $r-1$ beliebig gewählt werden können, wodurch dann das r^{te} sich bestimmt; und man hat also den Satz:

Legt man eine Curve m^{ter} Ordnung durch die gegebenen Punkte und durch $r-1$ Systeme von Berührungspunkten, so geht dieselbe noch durch ein r^{tes} System. Von ersteren können mehrere gruppenweise zusammenfallen; es kann aber auch geschehen, dass letzteres mit einem der ersteren zusammenfällt; was insbesondere bei $r=2$ immer eintritt.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass, wenn μ Systeme zusammenfallen, in den Punkten des Systems die neue Curve mit der gegebenen eine μ -punktige Berührung hat.

§. 5.

Systeme von Berührungscurven, welche durch feste Punkte der Curve gehen.

Lassen wir in dem vorigen Problem von den gegebenen Punkten, deren Anzahl grösser als $\mu \cdot r$ vorausgesetzt werden mag, μ mal r Punkte zusammenfallen. Nehmen wir sodann nur die übrigen $mn - (p + \mu)r$ Punkte als gegeben an. Wir haben es dann mit der unbestimmten Aufgabe zu thun:

Eine Curve m^{ter} Ordnung soll durch $mn - (p + \mu)r$ auf einer Curve n^{ter} Ordnung gegebene Punkte gehen, und diese Curve ausserdem in $p + \mu$ Punkten r -punktig berühren.

Diese Aufgabe ist, wenn $m \geq n - 2$, wie die vorige lösbar, und zwar sind μ Berührungspunkte noch willkürlich, die p übrigen aber dann bestimmt. Durch die gegebenen $mn - (p + \mu)r$ Punkte lassen sich also noch unendlich viele Curven der gesuchten Art legen; wenn μ Berührungspunkte willkürlich gewählt sind, noch immer r^{2p} .

Herr *Hesse* hat den Begriff eines *Systems* von Berührungscurven eingeführt (Band 49 dieses Journals) und für die Theorie der Curven dritter und vierter Ordnung davon mannigfachen Gebrauch gemacht. Geht man nämlich von einer bestimmten Berührungscurve aus, und lässt dieselbe sich stetig verändern, so durchlaufen die Berührungspunkte allmählig alle nur möglichen Combinationen. Aber es ist keineswegs möglich, durch solche stetige Veränderung zu *allen* Berührungscurven zu gelangen; sondern man muss zu diesem Zwecke diejenigen Berührungscurven, welche eine möglichst grosse Anzahl von beliebig gewählten Berührungspunkten gemeinsam haben, gleichzeitig variiren lassen. Aus jeder dieser Curven entsteht dann ein System von Berührungscurven, deren keines mit einem anderen eine Curve gemein hat.

Man bemerkt nun, dass die verschiedenen Systeme von Berührungscurven bei der vorliegenden Darstellung durch ein sehr einfaches Kennzeichen charakterisirt sind. Jedem System entspricht nämlich ein bestimmtes System der A ; denn diese Systeme sind völlig discret, und es kann daher niemals geschehen, dass man von einer Curve, welche einem System der A entspricht, zu Curven welche einem anderen System entsprechen, einen stetigen Uebergang durch lauter Berührungscurven hindurch herstelle. Man darf daher folgenden Satz aussprechen:

Man kann unendlich viele Curven m^{ter} Ordnung, wenn $m \geq n - 2$, bestimmen, welche eine Curve n^{ter} Ordnung in $\frac{n - 1 \cdot n - 2}{2} + \mu$ Punkten r -punktig berühren, während der Rest der Schnittpunkte gegeben ist. Diese Curven theilen sich in r^{2p} verschiedene Systeme ein, dergestalt dass es nicht möglich ist, von einer Curve eines Systems durch lauter Berührungscurven hindurch zu einer Curve eines anderen Systems stetig überzugehen.

Bezeichnen wir nun die den $p + \mu$ Berührungspunkten entsprechenden Integrale durch

$$w_k^{(1)}, \quad w_k^{(2)}, \quad \dots \quad w_k^{(p+\mu)},$$

die Summen der den festen Punkten entsprechenden Integrale durch U_k , so haben wir:

$$w_k^{(1)} + w_k^{(2)} + \cdots + w_k^{(p+\mu)} \equiv \frac{-U_k + A_k}{r}.$$

Betrachten wir jetzt r Curven desselben Systems, und addiren die entsprechenden Gleichungen, was links durch das Zeichen S angedeutet werden mag, so kommt:

$$S(w_k^{(1)} + w_k^{(2)} + \cdots + w_k^{(p+\mu)}) \equiv -U_k,$$

d. h.

Die Berührungspunkte von irgend r Berührungscurven desselben Systems liegen jederzeit auf einer Curve m^{ter} Ordnung, welche durch die gegebenen festen Punkte hindurchgeht.

Ausserdem hat man, wie im vorigen §., den Satz:

Legt man eine Curve m^{ter} Ordnung durch die gegebenen Punkte und durch $r-1$ Systeme von je $p+\mu$ Berührungspunkten, welche gleichen oder verschiedenen Systemen von Berührungscurven angehören, so geht dieselbe immer noch durch ein r^{tes} System.

Der vorige Satz kann als specieller Fall dieses letzteren aufgefasst werden, und für $r = 2$, bei überall zweipunktiger Berührung, geht dieser geradezu in jenen über.

§. 6.

Systeme von Curven, welche die gegebene Curve in einer gewissen Ordnung berühren, wo sie derselben begegnen.

Wenn mn durch r theilbar ist, so treten insbesondere Berührungscurven auf, wie diejenigen, welche Herr *Hesse* a. a. O. untersucht hat, welche die Curve n^{ter} Ordnung überall r -punktig berühren, wo sie derselben begegnen. Es ist dann $mn = (p + \mu)r$; die entstehenden Systeme sind allein von der Curve n^{ter} Ordnung selbst abhängig, nicht mehr, wie im vorigen, ausserdem durch besondere auf ihr beliebig gewählte Punkte charakterisirt. Die übrigen im vorigen §. angeführten Sätze fahren hier fort zu gelten; aber die Anzahl der Systeme kann unter Umständen eine andere werden als die oben angegebene.

Nehmen wir nämlich an, es habe m mit r einen gemeinschaftlichen Factor, so dass

$$m = m's, \quad r = r's,$$

wo m' , r' relative Primzahlen seien. So oft nun alle in den A vorkommende Zahlen m , q den Factor s enthalten, hat man

$$\frac{A_k}{r} = \frac{A'_k}{r'},$$

wo die A' Ausdrücke nach Art der A sind. Dann ist immer, wenn für die Berührungspunkte die betreffenden Integrale durch $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots, u_k^{\left(\frac{m'n}{r'}\right)}$ bezeichnet werden:

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \dots + u_k^{\left(\frac{m'n}{r'}\right)} \equiv \frac{A'_k}{r'},$$

d. h. das System von Berührungscurven besteht in Wahrheit aus Curven der Ordnung m' , welche die gegebene Curve überall r' -punktig berühren, und welche, s mal gezählt, als Systeme m^{ter} Ordnung mit r -punktiger Berührung angesehen werden können. Indem man von diesen abstrahirt, und bemerkt, dass diese Ausnahmsysteme der A an der Zahl r'^{2p} sind, gelangt man zu dem Satz:

Wenn $mn = (p + \mu)r$, $m \geq n - 2$, so giebt es Systeme von Curven m^{ter} Ordnung, welche die Curve n^{ter} Ordnung in $p + \mu$ Punkten r -punktig berühren, von denen μ beliebig sind. Ist $m = m's$, $r = r's$, wo m' , r' relative Primzahlen, so ist die Anzahl der Systeme $r^{2p} - r'^{2p}$; nur wenn m und r relative Primzahlen sind, ist die Anzahl derselben gleich r^{2p} .

Hieran knüpft sich eine Anzahl weiterer Sätze über diejenigen Fälle, in denen die Berührungspunkte mehrerer Berührungscurven zusammen den vollständigen Durchschnitt der Curve n^{ter} Ordnung mit einer anderen Curve bilden. Solche Sätze existiren auch noch, wenn man nicht Berührungscurven gleicher Ordnung betrachtet. Es ist nämlich, wenn m' , r' ; m'' , r'' ; $\dots$ $m^{(s)}$, $r^{(s)}$ die den verschiedenen zusammen betrachteten Berührungscurven entsprechenden Zahlen bezeichnen, und wenn die zugehörigen Systeme der A in ähnlicher Weise bezeichnet werden, nur nöthig, dass

$$\frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} + \dots + \frac{m^{(\mu)}}{r^{(\mu)}} = h.$$

eine ganze Zahl ist, und dass die Gleichungen stattfinden:

$$\frac{A'_k}{r'} + \frac{A''_k}{r''} + \dots + \frac{A_k^{(\mu)}}{r^{(\mu)}} \equiv 0,$$

damit die Berührungspunkte der Curven von den Ordnungen m' , m'' , $\dots$ $m^{(\mu)}$ auf einer Curve der h^{ten} Ordnung liegen.

Ich begnüge mich diese Quelle von Sätzen hier angegeben zu haben.

§. 7.

Berührung einer Curve vierter Ordnung durch Curven dritter Ordnung, vierpunktig in drei Punkten; und Berührung einer Curve sechster Ordnung durch Curven fünfter Ordnung, dreipunktig in 10 Punkten.

Die im Vorigen behandelten Probleme sind wesentlich unbestimmt. Es giebt aber Classen von völlig bestimmten Berührungscurven. Für $m \geq n$ treten

dieselben immer ein, wenn $mn = pr$, oder $\frac{m}{r} = \frac{p}{n}$. Hat nun n nicht die Form $4h + 2$, so haben p und n keinen gemeinschaftlichen Factor; man hat daher als allgemeinste Annahme $m = p.s$, $r = n.s$. Nur wenn n die Form $4h + 2$ hat, haben p und s den gemeinsamen Factor 2. In diesem Falle muss man daher setzen $m = \frac{p}{2}.s$, $r = \frac{n}{2}.s$. Und verbindet man dies mit den Bestimmungen des vorigen §., so ergibt sich folgender Satz:

Ist s eine beliebige Zahl, und n nicht von der Form $4h + 2$, so giebt es immer $n^{2p}(s^{2p} - 1)$ Curven der Ordnung $p.s$, welche die Curve n^{ter} Ordnung in p Punkten $n.s$ -punktig berühren. Ist dagegen n von der Form $4h + 2$, so giebt es $(\frac{1}{2}n)^{2p}.(s^{2p} - 1)$ Curven der Ordnung $\frac{1}{2}p.s$, welche die Curve n^{ter} Ordnung in p Punkten $\frac{1}{2}n.s$ -punktig berühren.

Dieser Satz muss scheinbar zwei Ausnahmen erfahren, bei $s = 1$ und $n = 4$ oder $n = 6$, weil in diesen Fällen $m < n$ wird. Aber in beiden Fällen ist der Satz dennoch richtig, wovon man sich in folgender Weise überzeugt. Die Anzahl von Bedingungen, welchen eine in $\frac{mn}{r}$ Punkten r -punktig berührende Curve unterworfen ist, findet man gleich $\frac{mn}{r}(r - 1)$. Damit hiedurch die Curve m^{ter} Ordnung ($m < n$) vollständig bestimmt sei, muss man die Gleichung haben:

$$\frac{mn(r - 1)}{r} = \frac{m.m + 3}{2},$$

oder

$$m = \frac{2n(r - 1)}{r} - 3.$$

Erstlich also muss r ein Factor von $2n$ sein, setzt man ferner $m < n$, so findet man $r < 2 + \frac{6}{n - 3}$. Diesen Bedingungen genügt im Allgemeinen nur $r = 2$; ausserdem aber $r = 4$ für $n = 4$, und $r = 3$ für $n = 6$. Man erhält daher folgende Berührungsaufgaben, welche als vollständig bestimmt von besonderem Interesse sind:

Die Curve n^{ter} Ordnung soll von einer Curve der $(n - 3)^{ten}$ Ordnung in $\frac{n.n - 3}{2}$ Punkten zweipunktig berührt werden; wovon die Aufgabe der Doppeltangenten bei den Curven vierter Ordnung ein besonderer Fall ist;

eine gegebene Curve vierter Ordnung soll von einer Curve dritter Ordnung in drei Punkten vierpunktig berührt werden;

eine gegebene Curve sechster Ordnung soll von einer Curve fünfter Ordnung in zehn Punkten dreipunktig berührt werden.

Die beiden letzten Aufgaben sind in dem oben angegebenen Satze bereits enthalten; dennoch mögen die allgemeinen Resultate für diese beiden Fälle hier noch näher specialisirt werden.

Für das zweite Problem erhält man folgende Bestimmung:

Es giebt 4096 Curven dritter Ordnung, welche eine gegebene Curve vierter Ordnung in drei Punkten vierpunktig berühren.

Die 4096 Curven entsprechen den 4096 verschiedenen Systemen der A , welche man für $p = 3$ bilden kann, wenn die Zahlen m, q die Werthe 0, 1, 2, 3 erhalten

dürfen. Die Berührungspunkte jeder Curve sind durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt; die Coefficienten der Gleichung sind θ -Functionen mit den Argumenten:

$$\begin{cases} v_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + u_1^{(3)} \equiv \frac{A_1}{4}, \\ v_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + u_2^{(3)} \equiv \frac{A_2}{4}, \\ v_3 = u_3^{(1)} + u_3^{(2)} + u_3^{(3)} \equiv \frac{A_3}{4}. \end{cases} \quad (10.)$$

Bezeichnet man die verschiedenen Berührungscurven entsprechenden Zahlen m , q durch obere Indices, so hat man immer die Berührungspunkte dreier Curven auf einer neuen Curve dritter Ordnung, sobald

$$\begin{aligned} m_i' + m_i'' + m_i''' + m_i'''' &\equiv 0 \pmod{4}, \\ q_i' + q_i'' + q_i''' + q_i'''' &\equiv 0 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Die so erhaltenen Curven dritter Ordnung theilen sich in drei Classen; die Curven der ersten berühren zweipunktig in den Berührungspunkten zweier der obigen Curven; die der zweiten berühren in den Berührungspunkten einer Curve zweipunktig, und gehen durch die Berührungspunkte zweier anderen hindurch; die der dritten Classe endlich gehen durch die Berührungspunkte von vier verschiedenen Curven. Die Anzahl aller dieser Curven ist sehr gross, und man erhält sie leicht durch eine einfache Abzählung, was ich hier übergehen zu können glaube. Weiteres über die Gruppierung dieser Berührungscurven siehe unten.

Soll eine Curve sechster Ordnung von einer Curve fünfter Ordnung in zehn Punkten dreipunktig berührt werden, so hat man $p = 10$, $m = 5$, $n = 6$, $r = 3$; jedes System von zehn Berührungspunkten wird mittelst einer Gleichung

zehnten Grades gefunden, deren Coefficienten θ -Functionen sind mit den Argumenten:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{(10)} \equiv \frac{A_1}{3}, \\ v_2 &= u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{(10)} \equiv \frac{A_2}{3}, \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_{10} &= u_{10}^{(1)} + u_{10}^{(2)} + \cdots + u_{10}^{(10)} \equiv \frac{A_{10}}{3}. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Berührungscurven ist 3^{20} . Indem man die Gleichungen dieser Art, welche zu drei verschiedenen Berührungscurven gehören, addirt, und dann

$$\frac{A_k + A'_k + A''_k}{3} \equiv 0$$

setzt, findet man den Satz:

Jede zwei Systeme von Berührungspunkten liegen auf einer Curve fünfter Ordnung, welche die Curve sechster Ordnung noch in den Berührungspunkten einer dritten Berührungcurve schneidet. Solcher Curven fünfter Ordnung giebt es also $\frac{3^{20} \cdot 3^{20} - 1}{6}$.

§. 8.

Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung in $\frac{n \cdot n - 3}{2}$ Punkten zweipunktig berühren.

Die Aufgabe, eine Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung so legen, dass sie eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung in $\frac{n \cdot n - 3}{2}$ Punkten zweipunktig berührt, ist bei weitem wichtiger als die vorigen, und von hervorragendem Interesse. Indem wir bei der bisher benutzten Bezeichnung bleiben, stellen sich die Gleichungen zwischen den Integralen, auf welche diese Aufgabe führt, folgendermassen dar:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \equiv \frac{A_1}{2}, \\ u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \equiv \frac{A_2}{2}, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ u_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}^{(1)} + u_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}^{(2)} + \cdots + u_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \equiv \frac{A_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{2}. \end{array} \right. \quad (11.)$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist um eins grösser als die der Unbekannten. Dennoch sind die Gleichungen unter einander verträglich, wie jetzt gezeigt werden soll; es ist aber keine eine Folge der anderen, vielmehr können sie nur für gewisse Systeme der A neben einander bestehen.

Herr *Riemann* hat a. a. O. p. 147 den Satz bewiesen, dass man ein gegebenes System von p Grössen immer und nur dann, und im Allgemeinen nur auf eine Weise, den Summen von je $p - 1$ entsprechenden Integralen gleich setzen könne, wenn θ für die gegebenen Grössen als Argumente verschwindet. In unserem Falle ist $p = \frac{n-1.n-2}{2}$, $p - 1 = \frac{n.n-3}{2}$; es giebt also stets eine Berührungscurve der gesuchten Art, sobald θ , mit den Argumenten $\frac{A_1}{2}, \frac{A_2}{2}, \dots, \frac{A_p}{2}$ gebildet, gleich Null wird. Man muss also haben:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\sum_{h,k=1}^{h,k=p} a_{hk} n_h (n_k + q_k)} + i\pi \sum_{k=1}^{k=p} n_k m_k \\ &= e^{-\frac{i\pi}{2} \sum m_k q_k - \frac{1}{4} \sum \sum a_{hk} q_h q_k} \cdot \sum e^{\sum \sum \frac{2n_h + q_h}{2} \cdot \frac{2n_k + q_k}{2} a_{hk} + i\pi \sum \frac{2n_k + q_k}{2} m_k}. \end{aligned}$$

Die in der letzten Form auftretende Summe geht, wenn man $-(n_k + q_k)$, $-(n_h + q_h)$ für n_k , n_h setzt, auch über in

$$\sum e^{\sum \Sigma \frac{2n_h + q_h}{2} \cdot \frac{2n_k + q_k}{2}} a_{hk} - i\pi \sum \frac{2n_k + q_k}{2} m_k$$

und wenn man diese Summe zu der vorigen, mit welcher sie identisch ist, addirt, findet sich:

$$0 = \left\{ \Sigma e^{\Sigma \Sigma \frac{2n_h + q_h}{2} \cdot \frac{2n_k + q_k}{2} a_{hk} \cdot (-1)^{\Sigma n_k m_k}} \right\} \cos \left(\frac{\Sigma q_k m_k}{2} \pi \right).$$

Die betrachtete θ -Function verschwindet also immer, wenn

$$q_1 m_1 + q_2 m_2 + \cdots + q_p m_p = 2h + 1, \quad (12.)$$

und dieses ist die Bedingung für das Zusammenbestehen der Gleichungen (11.).

Untersuchen wir nun die Anzahl der Combinationen, durch welche die Gleichungen (12.) erfüllt werden kann. Seien k der Grössen q gleich 0, die übrigen $(p - k)$ gleich 1; die den ersten Grössen q entsprechenden m können dann 0 oder 1 sein, was 2^k Combinationen giebt; die Summe der anderen m aber muss ungerade sein, oder es ist immer das letzte durch die übrigen $p - k - 1$

bestimmt. Die letzteren m können daher noch auf 2^{p-k-1} Weisen gewählt werden, oder die m im Ganzen auf 2^{p-1} Arten. Da die q auf $\frac{p \cdot p - 1 \cdots p - k + 1}{1 \cdot 2 \cdots k}$ Arten den angegebenen Bedingungen genügen können, so giebt es

$$\frac{p \cdot p - 1 \cdots p - k + 1}{1 \cdot 2 \cdots k} \cdot 2^{p-1}$$

Systeme der A , bei denen k der Grössen q gleich 0 sind. Setzen wir nun $k = 0, 1, 2, \dots, p - 1$, so finden sich im Ganzen

$$2^{p-1} \left(1 + \frac{p}{1} + \frac{p \cdot p - 1}{1 \cdot 2} + \cdots + p \right) = 2^{p-1} (2^p - 1)$$

Systeme der A , oder der Satz:

Es giebt $2^{\frac{n \cdot n - 3}{2}} \left(2^{\frac{n - 1 \cdot n - 2}{2}} - 1 \right)$ Curven $(n - 3)^{ter}$ Ordnung, welche eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung in $\frac{n \cdot n - 3}{2}$ Punkten zweipunktig berühren.

Für $n = 4$ giebt dies die 28 Doppeltangenten.

Die Berührungspunkte jeder Curve können mittelst einer Gleichung $(p - 1)^{ten}$ Grades gefunden werden. Man braucht nämlich nur auf beiden Seiten der Gleichungen (11.) die einem beliebig gegebenen Punkte entsprechenden u zu addiren, und man hat dann die Argumente von θ -Functionen vor sich. Aus diesen setzen sich die Coefficienten einer Gleichung p^{ten} Grades zusammen, von der eine Wurzel (dem beliebig gewählten Punkte entsprechend) bekannt ist.

Die Berührungspunkte von μ Curven dieser Art liegen jedesmal auf einer Curve der Ordnung $\frac{\mu(n-3)}{2}$, sobald das System besteht:

$$\frac{A_k^{(1)} + A_k^{(2)} + \cdots + A_k^{(\mu)}}{2} \equiv 0,$$

bei welchem die oberen Indices sich auf die verschiedenen betrachteten Curven beziehen. Man überblickt das Feld von Sätzen und Abzählungen, welche sich hieraus ergeben, und welche die natürliche Verallgemeinerung derjenigen Resultate bilden, auf welche man in der Theorie der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung geführt ist. Ich bemerke nur noch einen Satz, welcher ebenfalls in speciellster Fassung bei den Curven vierter Ordnung bereits bekannt ist. Betrachtet man nämlich die Curven $2h - (n - 3)^{ter}$ Ordnung, welche eine Curve

n^{ter} Ordnung in $hn - \frac{n \cdot n - 3}{2}$ Punkten zweipunktig berühren, und addirt zu den entsprechenden Gleichungen

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \dots + u_k^{(hn - \frac{n \cdot n - 3}{2})} \equiv \frac{A_k}{2}$$

die Gleichungen (11.) unter Voraussetzung desselben Systems der A , so findet sich, dass die ersten $hn - \frac{n \cdot n - 3}{2}$ Berührungspunkte mit den $\frac{n \cdot n - 3}{2}$ Berührungspunkten der Curve $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung in einer Curve h^{ter} Ordnung liegen. Nun ist die Anzahl der Systeme von Berührungscurven $2h - (n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung gleich 2^{2p} , und nur, wenn n ungerade ist, muss man das System ausschliessen, für welches das System der A verschwindet. Man hat also folgenden Satz:

Unter den 2^{2p} ($p = \frac{n-1 \cdot n-2}{2}$) Systemen von Berührungscurven, welche bei geradem n von ungerader Ordnung m , oder bei ungeradem n von gerader Ordnung m sind, und welche die gegebene Curve n^{ter} Ordnung überall, wo sie derselben begegnen, zweipunktig berühren, giebt es immer $2^{p-1}(2^p - 1)$ solche, dass die Berührungspunkte jeder Curve des Systems mit denen einer bestimmten der obigen Berührungscurven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung in einer Curve $\frac{m+n-3}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung liegen; und es giebt bei geradem n $2^{p-1}(2^p + 1)$, bei ungeradem $2^{p-1}(2^p + 1) - 1$ solcher Systeme, bei denen die Berührungspunkte niemals auf einer Curve $\frac{m+n-3}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.

§. 9.

Die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.

Die entwickelten allgemeinen Resultate sollen jetzt für die Curven vierter Ordnung genauer ausgeführt werden.

Die Anzahl der Doppeltangenten ist nach §. 8 gleich 28, wie bekannt. Man kann aber nach dem Vorigen sie schematisch darstellen, wie folgt. Jede Doppeltangente mag bezeichnet werden durch die in Klammern geschlossene Reihe der ihr entsprechenden Zahlen m, q , also durch:

$$(m_1, m_2, m_3; q_1, q_2, q_3).$$

Die Zahlen können 0 oder 1 sein, doch so, dass immer

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Nehmen wir also für die m alle möglichen aus den Zahlen 0 und 1 bestehenden Systeme, 0, 0, 0 ausgeschlossen, und bestimmen obiger Gleichung gemäss die zugehörigen Systeme der q , so erhalten wir die 28 Doppeltangenten in folgendem Schema:

(100, 100)	(010, 010)	(001, 001)	(011, 010)	(101, 100)	(110, 100)	(111, 100)
(100, 110)	(010, 110)	(001, 011)	(011, 001)	(101, 110)	(110, 101)	(111, 010)
(100, 101)	(010, 011)	(001, 101)	(011, 110)	(101, 001)	(110, 010)	(111, 001)
(100, 111)	(010, 111)	(001, 111)	(011, 101)	(101, 011)	(110, 011)	(111, 111).

Es giebt nach §. 5 63 Systeme von Kegelschnitten (*Hesse*, dieses Journal Band 49.), welche die Curve in 4 Punkten berühren, entsprechend den 63 möglichen Combinationen

$$(m_1, m_2, m_3; q_1, q_2, q_3),$$

die Combination (000, 000) allein ausgeschlossen.

Ein solcher Berührungskegelschnitt zerfällt immer in zwei Doppeltangenten

$$(m'_1, m'_2, m'_3; q'_1, q'_2, q'_3), \quad (m''_1, m''_2, m''_3; q''_1, q''_2, q''_3),$$

sobald

$$m'_i + m''_i \equiv m_i, \quad q'_i + q''_i \equiv q_i \pmod{2}, \quad (13.)$$

wobei ausserdem sein muss:

$$\begin{cases} m'_1 q'_1 + m'_2 q'_2 + m'_3 q'_3 \equiv 1, \\ m''_1 q''_1 + m''_2 q''_2 + m''_3 q''_3 \equiv 1. \end{cases} \quad (14.)$$

Es sind dabei entweder die q oder die m nicht sämmtlich Null; nehmen wir an, dies trete bei den q ein; sonst wären in der folgenden Bestimmung nur die q mit den m zu vertauschen. Dann zeigen erstlich die Gleichungen (13.), dass man für gegebene q_i die q'_i, q''_i auf sechs verschiedene Arten wählen kann. Ueberhaupt nämlich existiren acht Combinationen der q', q'' , welche jene Gleichungen erfüllen; von diesen aber sind die beiden auszuschliessen, für welche sämmtliche q' oder sämmtliche q'' Null sind (was nicht zusammen eintreten kann). Diese sechs Arten geben drei Paare von Systemen q', q'' , indem immer zwei Arten sich nur durch Vertauschung der q' mit den q'' von einander unterscheiden.

In jedem Paar von Systemen ist wenigstens ein Paar entsprechender q ungleich, also 0 und 1, demnach irgend ein anderes 1 und 0 oder 1 und 1. Es existiren daher ein q' und ein q'' mit verschiedenem unteren Index, welche gleich 1 sind. Bestimmt man nun die dem dritten Index entsprechenden m so, dass sie der betreffenden Gleichung (13.) genügen (was auf zwei Arten geschehen kann), so bestimmen die übrigen m sich aus (14.) und (13.) successive. Jedem der drei Paare q entsprechen also zwei Paare m ; oder man hat den Satz:

In jedem System von Berührungskegelschnitten kommen sechs Paare von Doppeltangenten vor. (*Hesse*, l. c., *Salmon*, higher plane curves.)

Da für irgend zwei solcher demselben System angehöriger Paare die Summe aller m_i so wie die Summe aller q_i stets gerade ist, so hat man ferner den Satz:

Die Berührungspunkte je zweier Paare, welche demselben System angehören, liegen auf einem Kegelschnitt. (ib., ib.)

Die Zahl der so erhaltenen Kegelschnitte ist bekanntlich gleich der der 63 Systeme, multiplicirt mit der Anzahl 15 der Combinationen von 6 Paaren zu zweien, und dividirt durch 3, da jede vier Tangenten, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, auf drei Arten in zwei Paare zerlegt werden können, also jeder Kegelschnitt dreimal vorkommt. So ist die Zahl dieser Kegelschnitte 315. Das obige Schema erlaubt sofort, die solchen Kegelschnitten entsprechenden Doppeltangenten zusammenzustellen.

Der allgemeinere Satz, dass die Berührungspunkte je zweier Kegelschnitte desselben Systems auf einem Kegelschnitt liegen (Hesse, l. c.), folgt aus §. 6.

Es giebt ferner nach §. 6 64 Systeme von Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung in 6 Punkten berühren. Die den Berührungspunkten entsprechenden Integrale genügen dann immer den Gleichungen:

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{(6)} \equiv \frac{A_k}{2}. \quad (15.)$$

Man übersieht nun, dass diese 64 Systeme sich sofort in zwei Classen sondern, je nachdem das System der A zugleich bei den Doppeltangenten vorkommt oder nicht; je nachdem also $\Sigma mq \equiv 1$ (was 28 mal geschieht) oder $\Sigma mq \equiv 0$ (was auf 36 Arten geschehen kann). Hat man nämlich für irgend eine Doppeltangente

$$u_k^{(7)} + u_k^{(8)} \equiv \frac{A_k}{2}, \quad (16.)$$

so folgt

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{(8)} \equiv 0,$$

d. h. die Berührungspunkte der Curve dritter Ordnung liegen mit denen der Doppeltangente auf einem Kegelschnitt; während, wenn es für ein System der A keine Gleichung wie (16.) giebt, auch die Berührungspunkte der Curve auf keinem Kegelschnitt liegen können, da die Gleichung (15.) dann eine passende Ergänzung nicht zulässt. Man hat also den Satz (Hesse, l. c.):

Von den 64 Systemen der Curven dritter Ordnung haben 28 die Eigenschaft, dass die 6 Berührungspunkte einer Curve auf einem Kegelschnitt liegen, und jeder Kegelschnitt geht dann noch immer durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente, welche für dasselbe System constant bleibt. Die Berührungspunkte bei Curven der übrigen 36 Systeme liegen nicht in einem Kegelschnitt.

Dagegen haben nach §. 6 beide Classen die gemeinsame Eigenschaft, dass die Berührungspunkte je zweier Curven desselben Systems auf einer Curve dritter Ordnung liegen. (Hesse, l. c.)

Zu diesen Systemen gehören auch die 4096 Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung in drei Punkten vierpunktig berühren (§. 7). In der That folgt aus (10.)

$$2(u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + u_k^{(3)}) \equiv \frac{A_k}{2};$$

jede Curve gehört also zu demjenigen System von Berührungscurven, dem das System der A_k zukommt. Umgekehrt aber folgt aus dieser Gleichung

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + u_k^{(3)} \equiv \frac{A_k}{4} + \frac{A'_k}{2},$$

wo in A_k , A'_k die Zahlen m , q jetzt überall nur die Werthe 0 und 1 erhalten dürfen. Ist über die A_k verfügt, so können die A'_k noch auf 64 Arten gewählt werden; daher gehören in jedes der 64 Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung 64 solche Curven, welche die Curve vierter Ordnung in drei Punkten

vierpunktig berühren. Dies stimmt damit überein, dass nach §. 4 durch jede zwei Punkte einer Curve vierter Ordnung 64 Kegelschnitte gelegt werden können, welche dieselbe in drei Punkten berühren. Legt man diese Kegelschnitte durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente, so sind die Berührungspunkte des Kegelschnitts zugleich diejenigen, in welchen eine Curve dritter Ordnung vierpunktig berühren kann. *So erhält man die 28.64 Berührungscurven, welche den erwähnten 28 Systemen angehören; aber man sieht, dass es noch 36.64 solcher Berührungscurven giebt, in deren Berührungspunkten nicht zugleich ein Kegelschnitt die Curve vierter Ordnung berühren kann.*

Ueberhaupt giebt es nach §. 5 je 63 Systeme von Curven $(2m)^{\text{ter}}$ Ordnung und je 64 Systeme von Curven $(2m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung zweipunktig berühren, wo sie derselben begegnen. Und diese letzteren 64 Systeme theilen sich immer in 28 und 36 so, dass die Berührungspunkte einer Curve aus einem der 28 Systeme immer mit den Berührungspunkten einer der 28 Doppeltangenten auf einer Curve $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, während etwas Aehnliches bei den anderen 36 Systemen niemals stattfindet. Aber alle Systeme haben die Eigenschaft, dass die Berührungspunkte je zweier Curven desselben Systems auf einer Curve desselben Grades liegen.

Man kann von diesen Sätzen leicht zu einer genaueren Discussion derjenigen Fälle übergehen, in denen die Berührungspunkte von 6, 8 etc. Doppeltangenten auf einer Curve dritter, vierter etc. Ordnung liegen, worüber von *Hesse* und *Steiner* (Bd. 49 dieses Journals) Sätze gefunden sind. Ich übergehe diese Ausführungen, welche nach den entwickelten Principien durch blosse Abzählungen erhalten werden können.

Von Curven, welche die Curve vierter Ordnung mehrpunktig berühren, will ich wenigstens noch die der dritten Ordnung anführen. Aus §. 6 folgt der Satz:

Es giebt 728 Systeme von Curven dritter Ordnung, welche eine Curve vierter Ordnung in vier Punkten dreipunktig berühren.

Zwischen den Integralen bestehen hier die Gleichungen:

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + u_k^{(3)} + u_k^{(4)} \equiv \frac{A_k}{3};$$

das System der A darf niemals verschwinden. Betrachtet man eine Curve, einem anderen System angehörig, für welches immer $2A_k$ an die Stelle von A_k tritt, und addirt die einer solchen Curve entsprechenden Gleichungen zu den vorigen, so findet sich die Summe analoger Integrale immer der Null congruent. Man hat daher folgenden Satz, welcher (unter anderen) das Verhalten dieser Systeme charakterisirt:

Diese 728 Systeme theilen sich in 364 Paare zu zweien so, dass die Berührungspunkte jeder Curve des einen Systems mit denen jeder Curve des anderen Systems auf einem Kegelschnitt liegen.

Aehnliche Sätze kann man für die Berührungscurven dieser und anderer Ordnungen in Menge aufstellen.

§. 10.

Ueber einige Sätze von Steiner, die Curven vierter Ordnung betreffend.

Ich benutze diese Gelegenheit, um einige Sätze über Curven vierter Ordnung zu beweisen, welche *Steiner* (dieses Journal Bd. 49, p. 266 folg.) angegeben hat, obwohl dieselben nicht in die Reihe der hier angestellten Betrachtungen gehören.

Nach *Hesse* (dieses Journal Band 49, p. 261) kommt die Aufstellung eines Berührungskegelschnitts darauf hinaus, der Gleichung der Curve die Form

$$uw - v^2 = 0$$

zu geben, wo u, v, w Ausdrücke der zweiten Ordnung sind. Alle Kegelschnitte, welche demselben der 63 Systeme angehören, sind dann in der Form enthalten

$$u + 2\lambda v + \lambda^2 w = 0,$$

und man findet die 6 in dem System vorkommenden Tangentenpaare durch eine Gleichung sechsten Grades in λ , indem man die Determinante dieses Kegelschnitts verschwinden lässt. Für den Schnittpunkt x der Tangenten eines Paares müssen dann die Differentialquotienten

$$u_i + 2\lambda v_i + \lambda^2 w_i$$

verschwinden, und man findet nach einem bekannten Verfahren die Producte und Quadrate der Coordinaten x den Unterdeterminanten des Kegelschnittes $u + 2\lambda v + \lambda^2 w = 0$ proportional. Diese Ausdrücke haben, wie man sofort sieht, die Form:

$$\varrho x_i x_k = p_{ik} + \lambda q_{ik} + \lambda^2 r_{ik} + \lambda^3 s_{ik} + \lambda^4 t_{ik},$$

wo ϱ einen willkürlichen Factor bedeutet, und wo die $p, q, \dots$ nur noch von den Coefficienten der Curve abhängen. Bildet man daher die Determinante dieser sechs Gleichungen, indem man ϱ und λ eliminirt, so hat man eine Gleichung zweiten Grades für die x , welche von der gewählten Wurzel λ ganz unabhängig ist. Und so hat man den von *Steiner* a. a. O. gegebenen Satz:

Die Doppelpunkte der 6 demselben System angehörigen Paare von Doppeltangenten liegen auf einem Kegelschnitt.

Da identisch

$$(uw - v^2)(k - \lambda)^2 = (u + 2kv + k^2 w)(u + 2\lambda v + \lambda^2 w) - (u + (k + \lambda)v + k\lambda w)^2,$$

so ist

$$u + (k + \lambda)v + k\lambda w = 0,$$

oder was dasselbe ist, jeder Kegelschnitt von der Form

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

ist ein solcher, welcher durch die Berührungspunkte zweier Kegelschnitte des Systems hindurchgeht. Lässt man denselben in ein Linienpaar p, q zerfallen, d. h. setzt man:

$$\alpha u_{ik} + \beta v_{ik} + \gamma w_{ik} = p_i q_k + q_i p_k,$$

so genügen die Coordinaten einer Geraden des Paares der Gleichung, welche durch Elimination von $\alpha, \beta, \gamma, q_1, q_2, q_3$ entsteht:

$$K = \begin{vmatrix} u_{11} & v_{11} & w_{11} & 2p_1 & 0 & 0 \\ u_{22} & v_{22} & w_{22} & 0 & 2p_2 & 0 \\ u_{33} & v_{33} & w_{33} & 0 & 0 & 2p_3 \\ u_{23} & v_{23} & w_{23} & 0 & p_3 & p_2 \\ u_{31} & v_{31} & w_{31} & p_3 & 0 & p_1 \\ u_{12} & v_{12} & w_{12} & p_2 & p_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Doppelpunkte der Paare müssen zugleich den Gleichungen genügen:

$$\alpha u_i + \beta v_i + \gamma w_i = 0,$$

oder, indem man α, β, γ eliminirt, der Gleichung

$$G = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man hat also den Satz:

Wenn man die vollständigen Vierecke construirt, deren Ecken die Berührungspunkte von Kegelschnitten desselben Systems sind, so bilden die Durchschnitte gegenüberliegender Seiten die Curve dritter Ordnung $G = 0$, und die Seiten selbst umhüllen die Curve dritter Classe $K = 0$.

Insbesondere folgen daraus die von *Steiner* a. a. O. gegebenen Sätze als specielle Fälle:

Auf der Curve $G = 0$ liegen die Doppelpunkte der 6 dem System angehörigen Paare von Doppeltangenten, so wie die Schnittpunkte der Geraden, welche die Berührungspunkte jedes Paares kreuzweise verbinden.

Und:

Die Curve $K = 0$ wird berührt von den sechs Paaren dem System angehöriger Doppeltangenten, so wie von den Geraden, welche die Berührungspunkte der Paare kreuzweise verbinden.

Lässt man in einem vollständigen Viereck 1, 2, 3, 4, dessen Ecken Berührungspunkte eines Kegelschnitts sein sollen, zwei, etwa 2 und 3 zusammenfallen, so fallen auch 5, 6 (siehe die Fig.) in denselben Punkt. Es gehören aber die Punkte 5, 6 der Curve $G = 0$ an; diese schneidet also in dem betreffenden Punkte die gegebene Curve vierter Ordnung, indem erstere die Gerade 5, 6, letztere die Gerade 2, 3 zur Tangente hat. Die Schnittpunkte von $G = 0$ mit der gegebenen Curve haben also die Eigenschaft, dass in ihnen ein Kegelschnitt die Curve vierpunktig berühren kann, der sie ausserdem noch (in 1 und 4) zweimal zweipunktig berührt. In jedem System giebt es demnach 12 Kegelschnitte dieser Art.

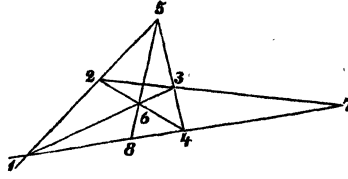


Figure 1: Fig.

Da ferner die Punkte 1, 8, 4, 7 ein harmonisches System bilden, so bilden auch in den betrachteten Punkten die Tangente an die gegebene Curve, die Tangente an $G = 0$, und die von der vierpunktigen Berührungsstelle nach

den zweipunktigen gezogenen Geraden ein harmonisches System. — Der Punkt 7 gehört der Curve $G = 0$ an; er wird hier der Durchschnitt der Tangente an der vierpunktigen Berührungsstelle mit der Sehne, welche die zweipunktigen Berührungsstellen verbindet.

Die Tangente 2, 3 an einer der vierpunktigen Berührungsstellen ist Tangente an $K = 0$; ebenso die Geraden 2, 1; 3, 4, welche jene Stelle mit denen der zweipunktigen Berührung verbinden; da nun auch 3, 1; 2, 4 Tangenten dieser Curve sind, und diese mit den ebengenannten Geraden unendlich nahe zusammenfallen, so müssen 1, 4, die Stellen der zweipunktigen Berührung, als Schnittpunkte nächster Tangenten auf $K = 0$ liegen. Diese Curve ist von der sechsten Ordnung; die 24 in einem System vorkommenden Punkte 1, 4 stellen also das vollständige Schnittsystem der Curve $K = 0$ mit der gegebenen Curve vor. So sind die folgenden von *Steiner* gegebenen Sätze bewiesen:

Es giebt 63.12 = 756 Kegelschnitte, welche eine gegebene Curve vierter Ordnung in einem Punkte a vierpunktig, und ausserdem noch in zwei anderen, b , c , zweipunktig berühren.

Die Punkte a sind in jedem System die 12 Durchschnitte von $G = 0$ mit der gegebenen Curve; auf $G = 0$ liegen auch b , c und der Schnittpunkt der Tangente der gegebenen Curve im Punkte a mit der Sehne b , c .

In jedem Punkte a bilden die nach b , c gezogenen Geraden mit den Tangenten der gegebenen Curve und der Curve $G = 0$ ein harmonisches System.

Die Tangente in a , sowie die drei Geraden ab , ac , bc berühren die Curve $K = 0$, und zwar ab , ac in b und c selbst, so dass die Punkte b , c in jedem System den vollständigen Durchschnitt von $K = 0$ mit der gegebenen Curve darstellen.

Steiner entwickelt endlich Zusammenhänge zwischen den Curven $G = 0$, $K = 0$. Die Beziehung, in welcher diese Curven zu einander stehen, kann man folgendermassen erkennen.

Betrachten wir statt der Functionen u , v , w irgend welche lineare Verbindun-

gen derselben

$$U_1 = a_1u + b_1v + c_1w,$$

$$U_2 = a_2u + b_2v + c_2w,$$

$$U_3 = a_3u + b_3v + c_3w.$$

Diese drei neuen Functionen können immer so bestimmt werden, dass sie die partiellen Differentialquotienten einer Function dritter Ordnung nach x_1, x_2, x_3 sind. Hierzu ist nöthig, dass folgende identische Gleichungen bestehen:

$$a_2u_3 + b_2v_3 + c_2w_3 = a_3u_2 + b_3v_2 + c_3w_2,$$

$$a_3u_1 + b_3v_1 + c_3w_1 = a_1u_3 + b_1v_3 + c_1w_3,$$

$$a_1u_2 + b_1v_2 + c_1w_2 = a_2u_1 + b_2v_1 + c_2w_1.$$

Diese Gleichungen sind für die x linear; setzt man also die Coefficienten auf beiden Seiten einander gleich, so findet man 9 lineare Gleichungen, welche in Bezug auf die gesuchten Grössen a, b, c homogen sind. Dennoch sind sie erfüllbar; denn man bemerkt sofort, dass ihre Determinante eine überschlagene ist, und demnach, weil von ungeradem Grade, identisch verschwindet.

Nun ändern sich offenbar die Ausdrücke G und K keineswegs, wenn man bei der Bildung derselben statt u, v, w irgend welche lineare Verbindungen derselben zu Grunde legt, z. B. die eben gefundenen partiellen Differentialquotienten einer homogenen Function f dritter Ordnung. Dann aber hat man, bis auf einen Zahlenfactor:

$$G = \Delta_f, \quad K = S_f,$$

wo Δ_f die Covariante dritter Ordnung, S_f die erste zugehörige Form dritter Classe von f bedeutet. Aus der bekannten Rolle, welche die Curven $\Delta_f = 0, S_f = 0$ in der Theorie der Curven dritter Ordnung spielen, folgen daher unmittelbar die von *Steiner* angegebenen Beziehungen. Die Curven $\Delta_f = 0, S_f = 0$ sind dieselben, welche Herr *Cremona* in seiner „Introduzione ad una teoria geometrica della curve piane“ als *Hessesche* und *Cayleysche* Curve bezeichnet hat. Von diesen gelten folgende Sätze:

Die zu den Wendepunkten der Hesseschen Curve gehörigen harmonischen Polaren sind die Rückkehrtangente der Cayleyschen Curve. (*Hesse*, dieses Journal Bd. 38, p. 252.)

Die zu den Rückkehrtangente der Cayleyschen Curve gehörigen harmonischen Punkte sind die Wendepunkte der Hesseschen Curve. (ib.)

Die Wendetangente von $u = 0$ berühren die Hessesche und die Cayleysche Curve in denselben 9 Punkten. (*Cremona*, l. c. p. 116.)

Jede Tangente der Cayleyschen Curve schneidet die Hessesche Curve in zwei Punkten, deren Tangente sich auf der Hesseschen Curve treffen, und in einem dritten Punkt, der mit dem Berührungspunkt auf der Cayleyschen Curve und mit den anderen beiden Schnittpunkten ein harmonisches System bildet. (ib.)

Von jedem Punkte der Hesseschen Curve gehen an die Cayleysche drei Tangente; die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier ist Tangente der Cayleyschen Curve; die dritte bildet mit der im Ausgangspunkt an die Hessesche

Curve gezogenen Tangente und mit den ersten beiden Tangenten ein harmonisches System. (ib.)

Die blosse Anwendung dieser Sätze giebt die folgenden, von *Steiner* gegebenen Resultate:

Aus jedem Wendepunkte w der Curve $G = 0$ gehen drei Tangenten Q, Q_1, Q_2 an die Curve, welche in q, q_1, q_2 berühren. Die letzteren drei Punkte liegen auf einer Rückkehrtangente R der Curve $K = 0$. Diese schneidet $K = 0$ ausser q und ausser dem Rückkehrpunkt r in zwei Punkten q', q'' , deren Tangenten Q', Q'' sich ebenfalls in w schneiden. Die Punkte r, q, q_1, q_2 bilden ein harmonisches System, die Tangenten Q, Q', Q'' mit der in w gezogenen Wendetangente ein zweites.

§. 11.

Ueber den Zusammenhang der Curven doppelter Krümmung mit Abelschen Functionen.

Im Vorigen sind nur ebene Curven behandelt worden. Ich werde jetzt zeigen, wie ähnliche Principien sich für die Behandlung der Curven doppelter Krümmung aufstellen lassen.

Betrachten wir den Durchschnitt zweier algebraischen Flächen. Die eine derselben, $u = 0$, sei m^{ter} Ordnung, die andere, $v = 0$, n^{ter} Ordnung. Die Durchschnittscurve können wir mit zwei Ebenenbüscheln, deren Axen beliebig im Raume liegen, so in Zusammenhang bringen, dass zwei entsprechende Ebenen beider Büschel sich auf der Curve durchschneiden. Sind nämlich die Gleichungen der Büschel

$$\begin{cases} (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) + z(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4) = 0, \\ (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4) + s(\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4) = 0, \end{cases} \quad (17.)$$

so führt die Elimination der x aus diesen Gleichungen und aus $u = 0, v = 0$ auf eine Gleichung

$$F(s, z) = 0, \quad (18.)$$

welche das gegenseitige Abhängigkeitsverhältniss der Parameter der Büschel ausdrückt.

Diese Gleichung ist sowohl für s als für z vom Grade $m + n$. Aber sie ist nicht unter allen Umständen irreductibel, sondern zerfällt, wenn die Oberflächen $u = 0, v = 0$ besondere Lagen gegen einander haben, von selbst in Factoren. Sei nämlich ein Theil der Schnittcurve zugleich als Theil des Durchschnitts zweier Flächen $u' = 0, v' = 0$ darstellbar, welche von niedrigerem Grade als $u = 0, v = 0$ sind; sei der zugefügte Theil a' mit einem andern a'' zusammen die Schnittcurve zweier Flächen $\underline{u'' = 0}, v'' = 0$, welche wieder von niedrigerem Grade sind, u. s. w., bis endlich ein Curventheil $a^{(\mu-1)}$ mit einer Curve $a^{(\mu)}$ zusammen der Durchschnitt zweier Flächen $u^{(\mu)} = 0, v^{(\mu)} = 0$ ist, und $a^{(\mu)}$ sich als der vollständige Schnitt zweier Flächen von niedrigerem Grade darstellen

lässt. So giebt es unzählige Oberflächenpaare deren Durchschnitt in eine andere Curve und in eine Raumcurve dritter Ordnung zerfällt; diese ist zusammen mit einer geraden Linie als Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung darstellbar, und die hinzugefügte Gerade endlich bildet den vollständigen Durchschnitt zweier Ebenen. Denken wir uns nun für alle diese Schnittcurven der Reihe nach die der Gleichung (18.) entsprechenden Gleichungen gebildet;

$$F(s, z) = 0, \quad F^{(1)}(s, z) = 0, \quad \dots \quad F^{(\mu+1)}(s, z) = 0,$$

so müssen folgende Gleichungen bestehen, in welchen die φ ganze Functionen bedeuten:

$$\begin{aligned} F^{(\mu)}(s, z) &= \varphi^{(\mu)}(s, z) \cdot F^{(\mu+1)}(s, z), \\ F^{(\mu-1)}(s, z) &= \varphi^{(\mu-1)}(s, z) \cdot \varphi^{(\mu)}(s, z), \\ F^{(\mu-2)}(s, z) &= \varphi^{(\mu-2)}(s, z) \cdot \varphi^{(\mu-1)}(s, z), \\ &\vdots \\ F(s, z) &= \varphi(s, z) \cdot \varphi^{(1)}(s, z). \end{aligned}$$

In diesem Falle ist also die Gleichung $F(s, z) = 0$ reductibel, und man kann sie als das Product zweier, oder allgemein zu reden, mehrerer irreductibler Factoren auffassen. Jeder Zweig einer Raumcurve, welcher einem solchen Factor entspricht, kann als *algebraisch definirte einfache Raumcurve* gelten. Ihre Ordnung ist die Ordnung von s und z in dem entsprechenden Factor; Ordnungen, welche immer gleich sein werden, wie aus dem eben angeführten Schema folgt, da nach dem früheren s und z in allen Functionen F zu gleichen Ordnungen vorkommen.

Jede solche einfache Raumcurve begründet nun eine Classe von *Abelschen* Functionen. Sei k die Ordnung der Curve, $\varphi(s, z) = 0$ die ihr entsprechende Gleichung.

Die Zahl p , welche die zugehörigen *Abelschen* Functionen charakterisirt, ist dann nach §. 1. gleich $\frac{1}{2}w - (k - 1)$, wo w die Anzahl derjenigen Werthsysteme s, z bedeutet, für welche $\varphi'(s) = 0$, ohne dass $\varphi'(z) = 0$.

Ist $\varphi'(s) = 0$, so bedeutet dieses, dass die Gleichung $\varphi = 0$ zwei gleiche Wurzeln s hat. Der zugehörige Werth von z bestimmt eine Ebene des ersten Büschels (17.), welcher die Curve in k Punkten schneidet; von diesen müssen zwei zusammenfallen, damit von den zugehörigen Ebenen des Büschels s zwei identisch werden. Es können nun hiebei folgende Fälle eintreten. Entweder ist die betreffende Ebene des Büschels z Tangentenebene der Curve; oder die Ebene s schneidet sich mit der Ebene z in einer Geraden, welche die Curve in zwei verschiedenen Punkten trifft; oder endlich die Curve hat einen Doppelpunkt, was eine Berührung der gegebenen Oberflächen oder einen Knotenpunkt in einer von beiden anzeigt. In den beiden letzten Fällen gehört ebensowohl ein Doppelwerth von s zu einem Werthe von z , als umgekehrt ein Doppelwerth von z zu einem Werthe von s ; in beiden Fällen müssen also sowohl $\varphi'(s)$ als $\varphi'(z)$ verschwinden. Schliessen wir nur diejenigen Fälle aus, in denen der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt übergeht und also auch noch $\varphi''(ss)\varphi''(zz) - \varphi''(sz)^2 = 0$.

Die Zahl w bedeutet also offenbar den *Rang* der Curve, d. h. die Zahl derjenigen Tangenten der Curve, welche eine gegebene Gerade treffen. So oft nämlich die Axe des Büschels s von einer Tangente der Curve getroffen wird, ist eine Ebene des Büschels Tangentenebene der Curve, und also für dieselbe $\varphi'(s) = 0$, ohne dass $\varphi'(z)$ verschwindet. Nach Herrn *Salmon* (Geometry of three dimensions p. 237) bestimmt sich diese Zahl aus der Formel

$$w = k(k - 1) - 2d,$$

wo d die Anzahl der von einem Punkte ausgehenden Strahlen bedeutet, welche der Curve zweimal begegnen, mag diese zweifache Begegnung nun, wie bei einem Doppelpunkte, in demselben, oder mag sie in verschiedenen Punkten stattfinden.

So hat man also endlich

$$p = \frac{(k - 1)(k - 2)}{2} - d$$

für die charakteristische Zahl der der Curve zugehörigen *Abelschen* Functionen.

Ich werde im Folgenden voraussetzen, dass die betrachtete Curve der vollständige und nicht in Theile zerlegbare Durchschnitt zweier Oberflächen

sei, welche sich nicht berühren; dass die Curve keinerlei Rückkehrpunkte und Doppelpunkte besitze *). In diesem Falle wird die Ordnung der Curve $= mn$, und nach Herrn *Salmon* (l. c. p. 249) der Rang derselben

$$w = mn(m + n - 2),$$

also

$$p = \frac{mn(m + n - 4)}{2} + 1;$$

eine Zahl welche, übereinstimmend mit dem Früheren, für $m = 1$ in $\frac{n - 1.n - 2}{2}$ übergeht.

Es ist leicht, die p überall endlichen Integrale zu bilden, welche diesem Falle entsprechen. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 &= 0, \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 &= 0, \\ u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 + u_4 dx_4 &= 0, \\ v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 + v_4 dx_4 &= 0 \end{aligned} \quad \left(u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

ergeben sich folgende, in denen $d\mu$ einen unbestimmten Factor bedeutet:

$$\begin{aligned} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 &= (u_3 v_4 - u_4 v_3) d\mu, & x_2 dx_3 - x_3 dx_2 &= (u_1 v_4 - u_4 v_1) d\mu, \\ x_1 dx_3 - x_3 dx_1 &= (u_4 v_2 - u_2 v_4) d\mu, & x_3 dx_4 - x_4 dx_3 &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) d\mu, \\ x_1 dx_4 - x_4 dx_1 &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) d\mu, & x_4 dx_2 - x_2 dx_4 &= (u_1 v_3 - u_3 v_1) d\mu. \end{aligned}$$

Bezeichnen also $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ ganz beliebige Grössen, so ist der Ausdruck

$$\frac{\Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4}{\Sigma a_i u_i \cdot \Sigma b_i v_i - \Sigma a_i v_i \cdot \Sigma b_i u_i} = d\mu,$$

demnach von den Werthen dieser Grössen völlig unabhängig. Derselbe ist von der $-(m+n-4)^{\text{ten}}$ Dimension; das Integral

$$\Psi = \int \frac{\Theta \cdot \Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4}{\Sigma a_i u_i \cdot \Sigma b_i v_i - \Sigma a_i v_i \cdot \Sigma b_i u_i}$$

lässt sich also mit Hülfe von $u = 0, v = 0$ als das Integral eines Differentialausdrucks mit einer einzigen Variablen darstellen, sobald Θ eine homogene Function der Ordnung $(m+n-4)$ ist. Unter den gemachten Voraussetzungen bleibt dieses

*) Eine solche Curve soll bisweilen der Kürze wegen eine Curve mn^{ter} Ordnung genannt werden. Die Natur der Curve hängt dann nicht bloß von der Ordnungszahl, sondern auch von ihrer Zerlegung ab, d. h. von den Ordnungen der Flächen, welche sich in ihr durchschneiden.

Integral auch überall endlich, und es ist nur noch nöthig sich zu überzeugen, ob wirklich p Integrale durch verschiedene Annahme von Θ erhalten werden. Bemerken wir hiezu, dass Θ mit Hülfe der Gleichungen $u = 0, v = 0$ umgeformt werden kann, ohne dass das Integral sich ändert. Man kann also, wenn U, V zwei Functionen $(m-4)^{\text{ter}}$ und $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung bedeuten, statt Θ die Function

$$\Theta + Uu + Vv$$

setzen, und die Constanten von U, V so bestimmen, dass ebensoviel Constante in Θ verschwinden. Demnach ist die Zahl der in Θ enthaltenen willkürlichen Constanten noch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \{ (m+n-1)(m+n-2)(m+n-3) - (m-1)(m-2)(m-3) - (n-1)(n-2)(n-3) \} \\ & = \frac{mn(m+n-4)}{2} + 1 = p. \end{aligned}$$

Man erhält also wirklich weder mehr noch weniger als p unabhängige, überall endliche Integrale, indem man diesen Constanten alle möglichen Werthe beilegt.

§. 12.

Der Abelsche Satz auf den Schnitt algebraischer Flächen angewandt.

Es sei nun $w = 0$ eine Oberfläche k^{ter} Ordnung. Betrachten wir den Ausdruck $\Sigma \Psi$ ausgedehnt über alle Schnittpunkte der Fläche $w = 0$ mit der gegebenen Curve. Führen wir bei der Integration wieder die Coefficienten einer Function w durch die Gleichung $w = 0$ als Variable ein, so dass erst in den oberen Grenzen

w in die gegebene Fläche übergehe. Bezeichnen wir durch δw , was aus w durch Variation der Coefficienten entsteht, so ist

$$\Sigma w_i dx_i = -\delta w.$$

Multiplizieren wir also unter dem Integralzeichen von Ψ mit der Determinante

$$\Sigma \pm c_1 u_2 v_3 w_4,$$

so erhalten wir im Zähler:

$$\begin{aligned} \Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4 \cdot \Sigma \pm c_1 u_2 v_3 w_4 &= \begin{vmatrix} \Sigma a_i c_i & \Sigma b_i c_i & \Sigma c_i x_i & \Sigma c_i dx_i \\ \Sigma a_i u_i & \Sigma b_i u_i & 0 & 0 \\ \Sigma a_i v_i & \Sigma b_i v_i & 0 & 0 \\ \Sigma a_i w_i & \Sigma b_i w_i & 0 & -\delta w \end{vmatrix} \\ &= -\delta w \cdot \Sigma c_i x_i \cdot \{\Sigma a_i u_i \Sigma b_i v_i - \Sigma b_i u_i \Sigma a_i v_i\}, \end{aligned}$$

also

$$\Psi = - \int \frac{\Theta \cdot \Sigma c_i x_i \cdot \delta w}{\Sigma \pm c_1 u_2 v_3 w_4}.$$

Bilden wir nun die Summe solcher Ausdrücke, über die betrachteten Schnittpunkte ausgedehnt:

$$\Sigma \Psi = - \int \Sigma \frac{\Theta \cdot \Sigma c_i x_i \cdot \delta w}{\Sigma \pm c_1 u_2 v_3 w_4}, \quad (19.)$$

und setzen wir über Θ nur voraus, dass es eine homogene Function $m + n - 4^{\text{ter}}$ Ordnung sei, so ist mit der Variation jedes Coefficienten von w nur eine rationale symmetrische Function der Coordinaten aller Schnittpunkte multiplicirt, welche sich durch die Coefficienten von w rational ausdrücken lässt. Die Ausführung der Integration kann also nur auf rationale und logarithmische Functionen der Coefficienten von w führen. Und so hat man folgenden Satz:

Wenn man die Schnittcurve zweier Flächen $u = 0$, $v = 0$ m^{ter} und n^{ter} Ordnung durch eine Oberfläche $w = 0$ schneidet, und wenn Θ eine homogene rationale Function $(m + n - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, so wird die Summe der Integrale

$$\int \frac{\Theta \cdot \Sigma \pm a_i b_i x_i dx_i}{\Sigma a_i u_i \cdot \Sigma b_i v_i - \Sigma b_i u_i \cdot \Sigma a_i v_i},$$

ausgedehnt über alle Schnittpunkte der Curve mit $w = 0$, ein Aggregat rationaler und logarithmischer Functionen der Coefficienten von w .¹

Man kann indess, wie im folgenden §. geschehen soll, nachweisen, dass, wenn Θ eine ganze Function $(m + n - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, in der Gleichung (19.) der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck verschwindet, indem überhaupt die Summe der Ausdrücke

$$\frac{F \cdot \Sigma c_i x_i}{\Sigma \pm c_1 u_2 v_3 w_4},$$

¹*Editorial note:* The numerator of the displayed integral is printed with one index throughout, $\Sigma \pm a_i b_i x_i dx_i$. The same sum is set $\Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4$ on pp. 221 and 222, and again in the very next theorem; the alternating sum requires four distinct indices. Kept as printed.

wo F eine homogene Function $(m + n + k - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, verschwindet, wenn man sie über die Schnittpunkte der Flächen $u = 0, v = 0, w = 0$ ausdehnt. Dann wird $\Sigma\Psi$ eine Constante, und man erhält den Satz:

Die Summe der Integrale

$$\int \frac{\Theta.\Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4}{\Sigma a_i u_i . \Sigma b_i v_i - \Sigma a_i v_i . \Sigma b_i u_i},$$

wo Θ eine ganze Function $(m + n - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, wird einer Constanten gleich, wenn man die Summe ausdehnt über alle Schnittpunkte der Flächen $m^{\text{ter}}, n^{\text{ter}}$ und k^{ter} Ordnung $u = 0, v = 0, w = 0$.

Diese Sätze sind specielle Fälle des folgenden, welcher für eine beliebige Anzahl von Variablen ausgesprochen ist:

Die Variablen $x_1, x_2 \dots x_r$ seien mit einander in Verbindung gesetzt durch die Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots \quad u_{r-2} = 0,$$

welche in Bezug auf jene homogen und von der Ordnung $m_1, m_2, \dots m_{r-2}$ sein sollen. Wählen wir nun ganz beliebig irgend $r(r-2)$ Grössen

$$\begin{array}{cccc} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \dots & a_r^{(1)}, \\ a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \dots & a_r^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(r-2)}, & a_2^{(r-2)}, & \dots & a_r^{(r-2)}, \end{array}$$

und bezeichnen durch $\alpha_k^{(i)}$ den Ausdruck

$$\alpha_k^{(i)} = a_1^{(i)} \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + a_2^{(i)} \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \dots + a_r^{(i)} \frac{\partial u_k}{\partial x_r},$$

ist endlich Θ eine homogene Function $(m_1 + m_2 + \dots + m_{r-2} - r)^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist die Summe der Integrale

$$\int \frac{\Theta.\Sigma \pm a_1^{(1)} a_2^{(2)} \dots a_{r-2}^{(r-2)} x_{r-1} dx_r}{\Sigma \pm \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_r^{(r)}},$$

ausgedehnt über alle Werthsysteme, welche die gegebenen Gleichungen zusammen mit einer $(r-1)^{\text{ten}}$ Gleichung $u = 0$ bestimmen, aus algebraischen und logarithmischen Functionen der Coefficienten der letzten Gleichung zusammengesetzt, und ist insbesondere constant, wenn Θ eine ganze Function ist.

§. 13.

Erweiterung eines von Jacobi aufgestellten algebraischen Satzes.

Den oben angewandten Hülfsatz kann man nun für beliebig viel Variable, den von *Jacobi* (dieses Journal Bd. 14, pag. 281.) geführten Beweis erweiternd, folgendermassen ableiten.

Es seien s Gleichungen

$$u^{(1)} = 0, \quad u^{(2)} = 0, \quad \dots \quad u^{(s)} = 0$$

gegeben, welche die Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_s$, nicht homogen, enthalten. Die Anzahl der allen gemeinsamen Lösungen ist μ . Man kann diese Lösungen finden, indem man alle Unbekannte bis auf eine eliminiert, und dann eine

Gleichung μ^{ten} Grades auflöst. Je nachdem $x_1, x_2 \dots x_s$ die beibehaltene Unbekannte ist, mögen diese Endgleichungen μ^{ten} Grades durch

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots \quad X_s = 0$$

bezeichnet sein. Man kann dann identisch setzen:

$$\begin{cases} M_1^{(1)}u^{(1)} + M_1^{(2)}u^{(2)} + \cdots + M_1^{(s)}u^{(s)} = X_1, \\ M_2^{(1)}u^{(1)} + M_2^{(2)}u^{(2)} + \cdots + M_2^{(s)}u^{(s)} = X_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ M_s^{(1)}u^{(1)} + M_s^{(2)}u^{(2)} + \cdots + M_s^{(s)}u^{(s)} = X_s; \end{cases} \quad (20.)$$

und zwar ist dabei, wenn $m^{(i)}$ den Grad von $u^{(i)}$ bezeichnet, $M_k^{(i)}$ von der Ordnung $\mu - m^{(i)}$. Setzen wir nun in diesen Gleichungen für die x Werthe, welche zwar einzeln den Gleichungen $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots X_s = 0$ genügen, aber kein zusammengehöriges, den gegebenen Gleichungen genügendes Werthsystem bilden, so verschwinden in (20.) die linken Seiten, nicht aber die u , und es muss also die Determinante der M verschwinden.

Differentiiren wir nun die Gleichungen (20.) nach den verschiedenen x , und setzen sodann zusammengehörige Werthsysteme ein. Aus der Differentiation der i^{ten} Gleichung erhalten wir das System²

$$\begin{aligned} M_i^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} + M_i^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1} + \cdots + M_i^{(s)} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_1} &= 0, \\ M_i^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2} + M_i^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2} + \cdots + M_i^{(s)} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_2} &= 0, \\ \vdots & \\ M_i^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_i} + M_i^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_i} + \cdots + M_i^{(s)} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_i} &= \frac{\partial X_i}{\partial x_i}, \\ \vdots & \\ M_i^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_s} + M_i^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_s} + \cdots + M_i^{(s)} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x_s} &= 0, \end{aligned}$$

und, wenn R die Functional-determinante der u ist, durch Auflösung:

$$R.M_i^{(h)} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial u^{(h)}}{\partial x_i}}.$$

²*Editorial note:* The second row of the system below is printed with a roman d in its last denominator, $\partial u^{(s)}/dx_2$. Every other denominator in the system has ∂ , and a partial derivative is what the differentiation requires. Kept as printed.

Bildet man also jetzt die Determinante Δ der M für ein solches zusammengehöriges System der x , so findet sich:

$$\Delta = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial X_s}{\partial x_s}. \quad (21.)$$

Inzwischen hat man nach den gewöhnlichen Regeln der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\Delta}{X_1 X_2 \cdots X_s} = \Sigma \left(\frac{\Delta}{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial X_s}{\partial x_s}} \right) \cdot \frac{1}{x_1 - x'_1 \cdot x_2 - x'_2 \cdots x_s - x'_s},$$

wo $x'_1, x'_2, \dots, x'_s$ irgend welche Wurzeln von $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_s = 0$ bedeuten, welche in dem eingeklammerten Ausdruck für $x_1, x_2, \dots, x_s$ zu setzen sind, und wo die Summe sich auf alle möglichen Combinationen dieser Wurzeln bezieht. Nun ist nach dem Vorigen der eingeklammerte Ausdruck 0 oder gleich dem entsprechenden Werth von $\frac{1}{R}$, jenachdem die x' ein zusammengehöriges System bilden oder nicht.³ Bezeichnen wir also die zusammengehörigen Systeme durch obere Indices 1, 2, $\dots, \mu$, so hat man

$$\frac{\Delta}{X_1 X_2 \cdots X_s} = \sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{1}{R^{(h)} \cdot x_1 - x_1^{(h)} \cdot x_2 - x_2^{(h)} \cdots x_s - x_s^{(h)}}. \quad (22.)$$

Die Formel kann, entsprechend einer Bemerkung von *Jacobi*, dazu angewandt werden, die Werthe der Summen

$$\sum_{h=1}^{h=\mu} (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_s^{\alpha_s})^h$$

zu bestimmen, wo keiner der Exponenten α verschwindet. Multipliciren wir nämlich (22.) mit irgend einer Function Ω von $x_1, x_2, \dots, x_s$. Der Werth von Ω für das h^{te} zusammengehörige System sei $\Omega^{(h)}$; man hat dann

$$\Omega = \Omega^{(h)} + A_1(x_1 - x_1^{(h)}) + A_2(x_2 - x_2^{(h)}) \dots$$

Beschränkt man sich also auf diejenigen Terme, welche nach absteigenden Potenzen der x entwickelt, negative Potenzen sämmtlicher x enthalten, so kann man rechts in (22.) unter dem Summenzeichen $\Omega^{(h)}$ statt Ω setzen. Und setzt man endlich $\Omega = R$, so findet man, dass die Entwicklung von $\frac{\Delta R}{X_1 X_2 \cdots X_s}$ mit der Entwicklung der Summe

$$\sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{1}{x_1 - x_1^{(h)} \cdot x_2 - x_2^{(h)} \cdots x_s - x_s^{(h)}}$$

³*Editorial note:* Printed so. By equation (21.) and by the argument just above it, the bracketed expression equals $1/R$ when the x' DO form a system belonging together and 0 when they do not, so the two alternatives are paired the wrong way round. Kept as printed.

in allen denjenigen Termen übereinstimmt, welche negative Potenzen sämmtlicher x enthalten; dass also

$$\sum_{h=1}^{h=\mu} \left(x_1^{(h)}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(x_2^{(h)}\right)^{\alpha_2} \dots \left(x_s^{(h)}\right)^{\alpha_s}$$

gleich dem Coefficienten von $x_1^{-\alpha_1-1} \cdot x_2^{-\alpha_2-1} \dots x_s^{-\alpha_s-1}$ in der Entwicklung von $\frac{\Delta R}{X_1 X_2 \dots X_s}$ ist, sobald keines der α verschwindet.

In der Formel (22.) ist Δ von der Ordnung

$$s\mu - m^{(1)} - m^{(2)} - \dots - m^{(s)},$$

während der Nenner $X_1 X_2 \dots X_s$ von der Ordnung $s\mu$ ist. Entwickelt man also in (22.) rechts nach absteigenden Potenzen der x , so verschwinden die Summen der Coefficienten von $x_1^{-\alpha_1-1} \cdot x_2^{-\alpha_2-1} \dots x_s^{-\alpha_s-1}$, d. h. die Summen

$$\sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{\left(x_1^{(h)}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(x_2^{(h)}\right)^{\alpha_2} \dots \left(x_s^{(h)}\right)^{\alpha_s}}{R^{(h)}},$$

sobald $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s < m^{(1)} + m^{(2)} + \dots + m^{(s)} - s$. Und man hat also den Satz:

Ist R die Functionaldeterminante der s Functionen $m^{(1)ten}, m^{(2)ten}, \dots, m^{(s)ten}$ Grades $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(s)}$ nach den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_s$, und ist F irgend eine Function der x , welche den Grad $m^{(1)} + m^{(2)} + \dots + m^{(s)} - s - 1$ nicht übersteigt, so verschwindet die Summe der Werthe von $\frac{F}{R}$, genommen für alle Werthsysteme der x , welche den Gleichungen

$$u^{(1)} = 0, \quad u^{(2)} = 0, \quad \dots \quad u^{(s)} = 0$$

genügen^{)}.*

Lassen wir endlich $x_1, x_2, \dots, x_s$ übergehen in $\frac{y_1}{y}, \frac{y_2}{y}, \dots, \frac{y_s}{y}$, und die u in homogene Functionen v dieser $s+1$ Variablen, dividirt durch die entsprechenden Potenzen von y . Ist dann D die Functionaldeterminante der v nach $y_1, y_2, \dots, y_s$, so hat man auch

$$R = \frac{D}{y^{m^{(1)}+m^{(2)}+\dots+m^{(s)}-s}};$$

und da auch F in eine homogene Function Φ dividirt durch $y^{m^{(1)}+m^{(2)}+\dots+m^{(s)}-s-1}$ übergeht, so erhält man die Formel

$$0 = \Sigma \frac{\Phi \cdot y}{D}.$$

Weil nun die Gleichungen bestehen:⁴

$$\begin{aligned} y \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} + y_1 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y_1} + \cdots + y_s \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y_s} &= 0, \\ y \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} + y_2 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y_1} + \cdots + y_s \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y_s} &= 0, \\ \vdots & \\ y \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y} + y_2 \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y_1} + \cdots + y_s \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y_s} &= 0, \end{aligned}$$

*) Für drei Gleichungen hat *Jacobi* diesen Satz ohne Beweis mitgetheilt. Band 15, dieses Journals pag. 307.

so verhält sich

$$y : y_1 : \dots : y_s = D : D_1 : \dots : D_s.$$

wo D_i die Functional determinante der v nach den y mit Ausschluss von y_i , und mit passend gewähltem Vorzeichen bedeutet. Es ist daher auch

$$\frac{y}{D} = \frac{cy + c_1y_1 + \cdots + c_sy_s}{\Sigma \pm c \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y_1} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y_s}},$$

welche Werthe auch den c beigelegt werden. Und endlich hat man den Satz, welcher der oben angewandte Hülfsatz selbst ist:

Sind $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots v^{(s)}$ homogene Functionen von $y, y_1, \dots y_s$ von den Ordnungen $m_1, m_2, \dots m_s$, und ist Φ eine homogene Function der Ordnung $m^{(1)} + m^{(2)} + \dots + m^{(s)} - s - 1$, so verschwindet immer die Summe der Ausdrücke

$$\frac{\Phi.(cy + c_1y_1 + \cdots + c_sy_s)}{\Sigma \pm c \frac{\partial v^{(1)}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial v^{(2)}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial v^{(s)}}{\partial u_s}},$$

gebildet für alle Werthsysteme der y , welche den Gleichungen $v^{(1)} = 0$, $v^{(2)} = 0$,
 $\dots v^{(s)} = 0$ gleichzeitig genügen.

§. 14.

Bestimmung der Constanten, und Umkehrung des Satzes
über die Punkte einer Curve mn^{ter} Ordnung, welche auf
einer Fläche k^{ter} Ordnung liegen.

Kehren wir zu der vollständigen und nicht zerfällbaren Schnittcurve der Flächen $u = 0$, $v = 0$ m^{ter} und n^{ter} Ordnung zurück. Die irgend einem Punkte

⁴*Editorial note:* Rows 2 and 3 below are printed with the coefficient y_2 on the second term. Euler's relation for a homogeneous function, of which row 1 is the pattern, pairs y_1 with $\partial v / \partial y_1$, so y_1 is what the argument requires. Kept as printed.

der Curve entsprechenden überall endlichen Integrale seien wieder $u_1, u_2, \dots, u_p$ $\left(p = \frac{mn(m+n-4)}{2} + 1\right)$, und werden für verschiedene Punkte durch obere Indices unterschieden.

Für die mnk Schnittpunkte der Curve mit einer Fläche k^{ter} Ordnung, $w = 0$, hat man dann nach dem Vorigen:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \dots + u_1^{(mnk)} \equiv \gamma_1, \\ u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \dots + u_2^{(mnk)} \equiv \gamma_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_p^{(1)} + u_p^{(2)} + \dots + u_p^{(mnk)} \equiv \gamma_p, \end{array} \right. \quad (23.)$$

wo die γ nur noch von der *Ordnung* von w abhängen. Da ferner die Fläche n^{ter} Ordnung⁵ als System von k Ebenen erscheinen kann, so hat man offenbar

$\gamma_i = k.c_i$, wo die c dem Durchschnitt einer Ebene mit der Curve entsprechen. Endlich sind (vgl. §. 3) diese Constanten Null, wenn w in eine Function Θ übergeht, also für $k = m + n - 4$, und sind daher überhaupt Null. Und man hat den Satz:

Die Summen der entsprechenden, überall endlichen Integrale, ausgedehnt über die Schnittpunkte einer algebraischen Fläche mit der gegebenen Curve, sind gleich Null.

Nach *Jacobi* (dieses Journal Bd. 15, p. 305) bestimmen sich von solchen mnk Punkten einer gegebenen Schnittcurve zweier Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung, welche auf einer Fläche k^{ter} Ordnung liegen können, immer eine gewisse Zahl durch die übrigen; und zwar ist die Zahl der durch die übrigen bestimmten, wenn

$$k \geq m + n - 3, \quad k \geq m, \quad k \geq n,$$

genau gleich p . Ist aber $k < m + n - 3$, so wird diese Zahl kleiner, nämlich gleich

$$p - \frac{m + n - k - 1.m + n - k - 2.m + n - k - 3}{6},$$

so lange k grösser als die Zahlen m, n bleibt; sie ist gleich

$$mnk - \frac{k + 1.k + 2.k + 3}{6} + \frac{k - n + 1.k - n + 2.k - n + 3}{6} + 1,$$

wenn $m > k \geq n - 3$, und gleich

$$mnk - \frac{k + 1.k + 2.k + 3}{6} + 1,$$

wenn k kleiner ist als beide Zahlen. Hieraus geht hervor, dass, wenn $k \geq m + n - 3$, die Zahl der Gleichungen (23.) genau gleich der Zahl der mittelst derselben

⁵ *Editorial note:* Printed n^{ter} . It is the cutting surface $w = 0$, of order k , that is allowed to degenerate, and the same clause counts k planes, so k^{ter} is what the argument requires. Kept as printed.

zu bestimmenden Punkte ist, welche neben einer Anzahl beliebig zu wählender auf einer Fläche k^{ter} Ordnung liegen können; und dass, wenn $k < m + n - 3$, die Anzahl jener Gleichungen grösser, insbesondere bei $k = m + n - 4$, um 1 grösser ist, ohne dass dieselben deswegen aufhören können verträglich zu sein.

Bemerken wir nun, dass nach dem Abelschen Theorem die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} du_1^{(1)} + du_1^{(2)} + \dots + du_1^{(mnk)} &= 0, \\ du_2^{(1)} + du_2^{(2)} + \dots + du_2^{(mnk)} &= 0, \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ du_p^{(1)} + du_p^{(2)} + \dots + du_p^{(mnk)} &= 0 \end{aligned}$$

die vollständige algebraische Integration zulassen, so sehen wir, dass insbesondere diese algebraischen Integrale mittelst einer geeigneten Bestimmung der in ihnen enthaltenen Constanten dahin müssen gebracht werden können, die Bedingungen auszudrücken, unter welchen mnk Punkte der Curve auf einer Fläche k^{ter} Ordnung liegen. Da nun die passende Bestimmung dieser Constanten in der transcendenten Form der Integralgleichungen soeben geleistet ist, so kann man den umgekehrten Satz aufstellen:

Sobald zwischen den überall endlich bleibenden, den von Herrn Riemann aufgestellten Bedingungen gemäss gebildeten Integralen die Gleichungen bestehen:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \dots + u_1^{(mnk)} = 0, \\ u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \dots + u_2^{(mnk)} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_p^{(1)} + u_p^{(2)} + \dots + u_p^{(mnk)} = 0, \end{array} \right. \quad (24.)$$

liegen die entsprechenden mnk Punkte der Curve auf einer Fläche k^{ter} Ordnung.

§. 15.

Berührungsflächen, welche durch gegebene Punkte der Curve gehen. Systeme von Berührungsflächen.

Die Aufgaben, welche im Früheren bei ebenen Curven behandelt sind, können nun in ganz ähnlicher Weise bei Raumcurven durchgeführt werden.

Es sei $k \geq m + n - 3$; auf der Curve mn^{ter} Ordnung seien $mnk - pr$ Punkte beliebig gegeben; man soll durch sie eine Fläche k^{ter} Ordnung) legen, welche die Curve in p Punkten r -punktig berührt.*

$$\left(p = \frac{mn(m + n - 4)}{2} + 1 \right).$$

*) Ist $k \geq n$, $k < m$, so wird die Fläche k^{ter} Ordnung insofern unbestimmt, als jede Fläche k^{ter} Ordnung, welche durch den Schnitt derselben mit der

Fläche n^{ter} Ordnung hindurchgeht, denselben Bedingungen genügt. In diesem Falle kann man also statt von der Fläche k^{ter} Ordnung, von der *Raumcurve* kn^{ter} Ordnung sprechen, welche bei solchen Veränderungen constant bleibt, und kann dieser die Eigenschaften beilegen, welche von der Fläche k^{ter} Ordnung gefordert werden. Ist dagegen k auch $\geq m$, so hat jede Fläche die verlangten Eigenschaften, welche durch die Schnittpunkte der drei Flächen m^{ter} , n^{ter} , k^{ter} Ordnung hindurchgeht. In diesem Falle also hat man es nur noch mit einem bestimmten Punktsystem zu thun, welches das gemeinsame Element eines Flächenbündels bildet.

Die Anzahl der in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen ist

$$mnk - pr + p(r - 1) = mnk - p.$$

Nehmen wir hinzu, dass nach dem Vorigen für die mnk Schnittpunkte einer Fläche k^{ter} Ordnung mit der Curve p Bedingungen eintreten, so sieht man, dass die Aufgabe sowohl bestimmt als lösbar ist. Aber nur die Berührungspunkte sind unter allen Umständen wirklich bestimmt; die Fläche k^{ter} Ordnung selbst kann, je nach der Grösse von k , mehr oder minder willkürlich bleiben.

Die den gegebenen Schnittpunkten entsprechenden Integralsummen seien nun $U_1, U_2, \dots, U_p$; die den gesuchten p Berührungspunkten entsprechenden seien $v_1, v_2, \dots, v_p$. Die Gleichungen (24.) gehen dann für den vorliegenden Fall über in:

$$\begin{aligned} rv_1 &\equiv -U_1, \\ rv_2 &\equiv -U_2, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ rv_p &\equiv -U_p, \end{aligned}$$

oder in:

$$\begin{aligned} v_1 &\equiv -\frac{U_1}{r} + \frac{A_1}{r}, \\ v_2 &\equiv -\frac{U_2}{r} + \frac{A_2}{r}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_p &\equiv -\frac{U_p}{r} + \frac{A_p}{r}. \end{aligned}$$

Die p Berührungspunkte bestimmen sich also durch eine Gleichung p^{ten} Grades, deren Coefficienten θ -Functionen mit den Argumenten v sind. Die letzteren enthalten die $2p$ Zahlen m, q in den A , und da jeder derselben alle Werthe von 0 bis $r - 1$ beigelegt werden dürfen, so ist die Anzahl aller Lösungen des Problems:

$$r^{2p} = r^{mn(m+n-4)+2}.$$

Man kann hier ähnliche Betrachtungen anstellen, wie in §. 4, und findet den Satz:

Wenn man durch $r-1$ Systeme von Berührungspunkten und durch die gegebenen Punkte eine Fläche k^{ter} Ordnung legt, so schneidet sie die gegebene Curve

in p Punkten, in denen eine durch die gegebenen Punkte gehende Fläche k^{ter} Ordnung die Curve berührt.

Von den $r - 1$ Systemen können mehrere zusammenfallen, wo denn die ersterwähnte Fläche k^{ter} Ordnung an solchen Punkten berühren muss.

Von den gegebenen Punkten können selbst μ mal r so zusammentreten, dass in ihnen die gesuchte Fläche ebenfalls r -punktig berührt. Alsdann berühren also die betrachteten Flächen in $(p + \mu)$ Punkten r -punktig, und gehen ausserdem durch $mnr - (p + \mu)r$ gegebene Punkte.

Lassen wir nur die letzteren gegeben sein, so wird die Aufgabe offenbar unbestimmt, und es können immer μ Berührungspunkte beliebig gewählt werden, wo denn jedesmal die Aufgabe noch r^{2p} Lösungen gestattet.

Hiebei entsteht der Begriff eines *Systems von Berührungsflächen*. Durch continuirliche Aenderung der μ wählbaren Berührungspunkte kann man aus einer Berührungsfläche unendlich viele stetig ableiten; aber nur diejenigen, für welche das System der A dasselbe ist. Bezeichnen wir also als *System von Berührungsflächen* solche, die durch stetigen Uebergang aus einander abgeleitet werden können, so hat man den Satz:

Eine Curve $m.n^{\text{ter}}$ Ordnung lässt $r^{mn(m+n-4)+2}$ Systeme von Berührungsflächen k^{ter} Ordnung zu, welche die Curve in $p + \mu$ Punkten r -punktig berühren, und ausserdem durch $mnr - (p + \mu)r$ auf der Curve gegebene Punkte geht; wobei $k \geq m + n - 3$ vorausgesetzt wird.

Und man hat über dieselben (vgl. §. 5.) folgende Sätze:

Die Berührungspunkte von irgend r Flächen desselben Systems liegen auf einer Fläche k^{ter} Ordnung, welche durch die festen Punkte hindurchgeht.

Legt man durch die gegebenen Punkte und durch $r - 1$ Systeme von je $p + \mu$ Berührungspunkten, welche gleichen oder verschiedenen Systemen angehören können, eine Fläche k^{ter} Ordnung, so trifft dieselbe noch immer ein r^{tes} System von Berührungspunkten.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo mnr durch r theilbar ist. In diesem Falle kann man alle Schnittpunkte der Fläche k^{ter} Ordnung mit der Curve zu r in $\frac{mnr}{r}$ Punkte zusammenrücken lassen, und man erhält dann Systeme von Berührungsflächen, welche die gegebene Curve r -punktig berühren, wo sie derselben begegnen. Diese Systeme sind dadurch wichtig, dass sie nur noch von der Natur der Curve selbst abhängen, nicht mehr von der Lage eines beliebig auf ihr gewählten Punktsystems. Die $p + \mu = \frac{mnr}{r}$ Integrale u_h , welche den Berührungspunkten entsprechen, werden hier bestimmt durch Gleichungen der Form:

$$u_h^{(1)} + u_h^{(2)} + \cdots + u_h^{\left(\frac{mnr}{r}\right)} \equiv \frac{A_h}{r}.$$

Man leitet daraus, wie in §. 6, den Satz ab:

Wenn $k \geq m + n - 3$ und $mn = (p + \mu)r$, so giebt es Systeme von Flächen k^{ter} Ordnung, welche die Curve $m.n^{\text{ter}}$ Ordnung in $p + \mu$ Punkten r -punktig berühren. Die Zahl der Systeme ist r^{2p} , wenn k und r relative Primzahlen sind;

ist dagegen $k = k's$, $r = r's$, und sind k' , r' relative Primzahlen, so ist die Anzahl der Systeme $r^{2p} - r'^{2p}$.

Sätze über die Lage der Berührungspunkte erhält man, wie in §. 6 angedeutet ist.

§. 16.

Berührungsflächen, welche nur in endlicher Anzahl existiren.

Unter den soeben behandelten Aufgaben zeichnen einige sich durch die Eigenschaft aus, völlig bestimmt zu sein.

Ist $k \geq m + n - 3$ und $mnk = pr$, so hat man eine in p Punkten r -punktig berührende Fläche vor sich, deren Berührungspunkte wenigstens vollkommen bestimmt sind. Nun können die Zahlen mn und $p = \frac{mn(m+n-4)}{2} + 1$ nur den Factor 2 gemein haben, und zwar auch diesen nur, wenn eine der Zahlen m , n die Form $4h+2$ hat, während die andere ungerade ist. In diesem Falle setze man

$$k = \frac{p}{2}.s, \quad r = \frac{mn}{2}.s,$$

in jedem anderen

$$k = p.s, \quad r = mn.s,$$

und man erhält nach den Sätzen des vorigen §. für die in Rede stehenden Aufgaben, deren Lösung auf der Hand liegt, folgende Bestimmungen:

Für eine Curve $m.n^{ter}$ Ordnung giebt es $n^{2p}(s^{2p}-1)$ Berührungsflächen der Ordnung $p.s$, welche in p Punkten $mn.s$ -punktig berühren. Nur wenn eine der Zahlen m , n von der Form $4h+2$, die andere ungerade ist, giebt es $\left(\frac{n}{2}\right)^{2p}(s^{2p}-1)$ Berührungsflächen von der Ordnung $\frac{p}{2}.s$, welche in p Punkten $\frac{mn}{2}.s$ -punktig berühren.⁶

Ueber die gegenseitige Lage der Systeme von Berührungspunkten gelten analoge Sätze wie bei den Systemen von Berührungsflächen.

Aber zu diesen Aufgaben treten andere, welche ebenfalls völlig bestimmt und dadurch merkwürdig sind, dass für $n=1$, $m=4$ die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung als specieller Fall erscheinen. Ist nämlich $k < m+n-3$, aber zugleich k gleich oder grösser als die Zahlen m , n , so ist nach §. 16 die zur Bestimmung der Schnittpunkte der Fläche mit der Curve gleich

$$p - \frac{m+n-k-1.m+n-k-2.m+n-k-3}{6}$$

⁶ Editorial note: Printed n^{2p} and $\left(\frac{n}{2}\right)^{2p}$. The curve here is of order $m.n$, not n , and the theorem of §. 15 that this specializes gives the count as a power of the number of systems, so $(mn)^{2p}$ and $\left(\frac{mn}{2}\right)^{2p}$ are what the argument requires; the n^{2p} of the corresponding plane theorem in §. 7, where the curve really is of order n , appears to have been carried over. Kept as printed.

einer Fläche $\frac{k+m+n-4}{2}$ ter Ordnung liegen; und es giebt, wenn $m+n$ gerade, $2^{p-1}(2^p+1)-1$, wenn $m+n$ ungerade, $2^{p-1}(2^p+1)$ solcher Systeme, bei welchen die Berührungspunkte einer Fläche niemals auf einer Fläche der Ordnung $\frac{k+m+n-4}{2}$ liegen.

§. 17.

Curven vierter Ordnung, welche den Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung bilden.

Die einfachsten vollständigen Raumcurven sind die der vierten Ordnung, welche den Durchschnitt zweier Flächen der zweiten Ordnung bilden. Für diese ist $p = 1$, sie führen also auf elliptische Functionen, wovon man sich auch durch directe Betrachtung des überall endlich bleibenden Integrals überzeugt. Vier Punkte, welche in einer Ebene liegen, genügen dann bei geeigneter Bestimmung über den Anfangswerth jenes Integrals der Gleichung:

$$u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} \equiv 0.$$

Statt der Modulsysteme A kann man hier die Grössen $2aK + 2biK'$ setzen. Zunächst also findet man, indem man die Grössen u sämmtlich einander gleich setzt, *die Punkte, in welchen eine Ebene vierpunktig berühren kann*, aus der Formel:

$$u \equiv \frac{2aK + 2biK'}{4}. \quad (25.)$$

Die Zahlen a, b können die Werthe 0, 1, 2, 3 erhalten; *die Anzahl solcher Punkte ist also 16*, wie bekannt. Für einen derselben ist $a = 0, b = 0$, also auch $u = 0$; *die untere Grenze des Integrals u ist daher so zu wählen, dass für den Berührungspunkt einer Wendungsberührebene das Integral verschwindet.*

Lässt man nur drei der u einander gleich werden, so hat man eine Gleichung der Form:

$$u + 3u' \equiv 0,$$

oder

$$u' \equiv -\frac{u}{3} + \frac{2aK + 2biK'}{3}, \quad (26.)$$

woraus der Satz folgt:

Durch jeden Punkt der Curve vierter Ordnung kann man neun Schwingungsebenen an die Curve legen.

Unter diesen ist die Schwingungsebene⁷ im Punkte selbst nicht enthalten.

Lässt man nur zwei der u einander gleich werden, so hat man

$$u'' \equiv -\frac{u + u'}{2} + \frac{2aK + 2biK'}{2}, \quad (27.)$$

⁷Editorial note: Printed Schwingungsebene, the plane of oscillation. The sentence before it, the sentence after it and the mathematics all require Schmiegungeebene, the osculating plane. Kept as printed.

d. h.

Durch je zwei Punkte der Curve lassen sich vier Tangentenebenen an dieselbe legen.

Werden auch die andern u einander gleich, so hat man eine doppeltberührende Ebene, und für die Berührungspunkte⁸

$$u + u' = \frac{2aK + 2biK'}{2}, \quad (28.)$$

d. h.

Es giebt vier Systeme von Ebenen, welche die Curve zweimal berühren, und durch jede Tangente geht eine Ebene jedes Systems.

Wenn man die vier Argumente u'' , welche aus der Gleichung (27.) entspringen, addirt, so findet man ihre Summe gleich $-2(u + u')$, d. h.

Durch irgend zwei Punkte der Curve und die Berührungspunkte der durch sie an die Curve gelegten Tangentenebenen, lässt sich eine Schaar von Flächen zweiter Ordnung legen, welche in den gegebenen Punkten die Curve berühren.

Von den 9 Punkten (26.), in denen eine aus einem gegebenen Punkte gelegte Schmiegungeebene die Curve berühren kann, liegen drei mit dem gegebenen in einer Ebene, so oft die Summen der entsprechenden a und der entsprechenden b durch drei theilbar sind. Mit Rücksicht auf die von mir pag. 111 dieses Bandes gegebene Darstellung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung kann man diese Beziehungen durch folgenden Satz ausdrücken:

Wenn man einen Punkt der Curve vierter Ordnung mit denjenigen 9 Punkten verbindet, in denen eine von demselben gelegte Schmiegungeebene

die Curve berühren kann, und wenn man diese 9 Strahlen durch irgend eine Ebene schneidet, so erhält man ein Punktsystem, welches das System von Wendepunkten einer Curve dritter Ordnung sein kann.

Ferner:

So oft drei dieser 9 Punkte mit dem gegebenen in einer Ebene liegen, liegen die anderen 6 auf einer Schaar von Flächen zweiter Ordnung, welche in dem gegebenen Punkte die Curve berühren.

Alle 9 Punkte liegen auf einer Schaar von Flächen dritter Ordnung, welche in dem gegebenen Punkte die Curve dreipunktig berühren.

Betrachten wir noch die gegenseitige Lage der Berührungspunkte der Wendungsberührebenen, welche durch die Formel (25.) gegeben sind. Bezeichnen wir irgend einen jener 16 Punkte, den Coefficienten a, b entsprechend, durch (a, b) , so liegen offenbar, weil die entsprechenden u zusammen congruent 0 sind, (a, b) , $(a + 2, b)$, $(a, b + 2)$, $(a + 2, b + 2)$ in einer Ebene. Ferner ist auch mit 0 congruent die Summe irgend zweier der solchen vier Punkten angehörigen Integrale, multiplicirt mit 2. Man hat daher die Sätze:

Die 16 Berührungspunkte der Wendungsberührebenen theilen sich in vier Gruppen zu vier. Je vier Punkte derselben Gruppe liegen in einer Ebene; und

⁸Editorial note: Equation (28.) is printed with a two-bar $=$, where (25.), (26.) and (27.) all set the three-bar $\equiv$. These are congruences with respect to the periods, not equations, so $\equiv$ is what the argument requires. Kept as printed.

die Tangenten je zweier Punkte derselben Gruppe liegen gleichfalls in einer Ebene, so dass solche vier Tangenten sich in demselben Punkte schneiden.

Bekanntlich sind jene vier Ebenen die des beiden Flächen gemeinsamen Polartetraeders, und die letzterwähnten Punkte sind die Ecken desselben.

§. 18.

Raumcurven sechster Ordnung.

Die Theorie der Curven sechster Ordnung, welche der vollständige Durchschnitt von Flächen zweiter und dritter Ordnung sind, knüpft sich wesentlich an die Theorie der dreifach berührenden Ebenen, welche für sie fast ganz dieselbe Rolle spielen, wie die Doppeltangenten für die ebenen Curven vierter Ordnung. Man hat für diese Curven $p = 4$; die Bedingungen also dafür, dass 6 Punkte der Curve in einer Ebene liegen, sind enthalten in den Gleichungen

$$u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{(6)} \equiv 0,$$

$$u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{(6)} \equiv 0,$$

$$u_3^{(1)} + u_3^{(2)} + \cdots + u_3^{(6)} \equiv 0,$$

$$u_4^{(1)} + u_4^{(2)} + \cdots + u_4^{(6)} \equiv 0.$$

Dreifach berührende Ebenen erhält man, wenn dreimal zwei Systeme der u zusammenfallen, wenn also

$$u'_k + u''_k + u'''_k \equiv \frac{A_k}{2}.$$

Der Schluss des §. 16 führt dann sofort auf folgende Sätze:

Es giebt 120 Ebenen, welche eine Raumcurve sechster Ordnung in drei verschiedenen Punkten berühren.

Legt man durch irgend drei Berührungspunkte einer solchen Ebene eine Fläche h^{ter} Ordnung, so schneidet sie die Curve noch in $6h - 3$ Punkten, in welchen dieselbe von einer Fläche $(2h - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung zweipunktig berührt werden kann. Man erhält so 120 Systeme von Berührungsflächen $(2h - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Es giebt deren noch 136 andere, deren Berührungspunkte nie auf einer Fläche h^{ter} Ordnung liegen. Aber alle 256 Systeme haben die gemeinsame Eigenschaft, dass die Berührungspunkte je zweier Flächen desselben Systems auf einer Fläche $(2h - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.

Ferner:

Es giebt 255 Systeme von Flächen zweiter Ordnung, welche die Curve sechster Ordnung in 6 verschiedenen Punkten berühren; die Berührungspunkte je zweier Flächen desselben Systems liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung.

In jedem dieser Systeme kommen 28 Flächen vor, welche in Paare dreifach berührender Ebenen zerfallen. Die 12 Berührungspunkte je zweier solcher Paare liegen auf einer Flächenschaar zweiter Ordnung, d. h. auf einer Raumcurve vierter Ordnung.

Solcher Raumcurven vierter Ordnung giebt es hienach $\frac{255.28.27}{2}$. Aber da ein System von vier Ebenen auf drei Arten in zwei Paare getheilt werden kann, so ist dabei jede Curve vierter Ordnung dreimal gerechnet. *Die wirkliche Zahl dieser Curven vierter Ordnung ist daher $\frac{255.28.27}{2.3} = 32130$.*

Da sämmtliche 360 Berührungspunkte auf mehrfache Weise so unter 30 Flächen zweiter Ordnung (Raumcurven vierter Ordnung) vertheilt werden können, dass kein Punkt auf mehreren Flächen liegt, *so liegen alle 360 Berührungspunkte auf einer Flächenschaar der sechszigsten Ordnung, und sind der vollständige Durchschnitt derselben mit der Curve sechster Ordnung.*

Damit 12 Punkte der Curve sechster Ordnung auf einer Flächenschaar zweiter Ordnung, oder auf einer Raumcurve vierter Ordnung liegen, müssen die Gleichungen

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{(12)} \equiv 0$$

erfüllt sein. Lässt man viermal drei Punkte zusammenfallen, so ergeben sich die verschieden gebliebenen Integrale aus Gleichungen der Form

$$u_k + u'_k + u''_k + u'''_k \equiv \frac{A_k}{3},$$

wonach sich die Punkte jedesmal mittelst einer Gleichung vierten Grades bestimmen. Man hat also den Satz:

Es giebt $3^8 = 6561$ Raumcurven vierter Ordnung, welche die Raumcurve sechster Ordnung in vier verschiedenen Punkten dreipunktig berühren.

Und:

Legt man durch die Berührungspunkte zweier solcher Curven eine Fläche zweiter Ordnung, so schneidet sie die Curve sechster Ordnung noch in den Berührungspunkten einer dritten Berührungscurve.

§. 19.

Erweiterung eines Steinerschen Problems.

Im Vorigen sind ausschliesslich Berührungsaufgaben behandelt, und gezeigt, wie die Lösung derselben mit Hülfe der Abelschen Functionen sich aufs Einfachste darstellt. Ich werde jetzt noch ein anderes sehr allgemeines Problem untersuchen; ein Problem, dessen speciellster Fall von *Steiner* behandelt ist, und von welchem ich p. 94 u. folg. dieses Bandes eine analytische Lösung gegeben habe, welche sich im Wesentlichen gleichfalls auf die hier auseinander gesetzten Principien stützt. Dieses allgemeine Problem lautet folgendermassen:

Gegeben sind r Gruppen von je $m+n-p$ Punkten einer Curve mn^{ter} Ordnung ($k \geq m+n-3$); gesucht r Systeme von je p Punkten auf derselben, in folgender Art. Eine Fläche k^{ter} Ordnung soll durch die Punkte der ersten Gruppe und die ersten $f-1$ Systeme gehen; sie ist dadurch vollständig bestimmt, und ihre übrigen Schnittpunkte mit der Curve bilden das f^{te} System. Eine zweite Fläche k^{ter} Ordnung soll durch die zweite Gruppe und durch das

2^{te} , 3^{te} , ... f^{te} System gehen; sie bestimmt das $f + 1^{te}$ System. Auf diese Weise soll man fortfahren, so dass der Reihe nach r Flächen k^{ter} Ordnung gebildet werden, und dass die Reihe der Systeme sich schliesst, indem nach dem r^{ten} System kein neues mehr erzeugt wird, sondern wieder das erste, nach diesem das zweite, u. s. w.

Man erhält die entsprechende Aufgabe für die Ebene, indem man nur $n = 1$ setzt.

Bezeichnen wir die den Gruppen entsprechenden Integralsummen durch w_k , die den Systemen entsprechenden durch v_k , indem wir die verschiedenen Gruppen und Systeme durch obere Indices unterscheiden. Der Ansatz des Problems ist dann in folgenden Gleichungen enthalten:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_k^{(1)} + v_k^{(2)} + \dots + v_k^{(f)} \equiv -w_k^{(1)}, \\ v_k^{(2)} + v_k^{(3)} + \dots + v_k^{(f+1)} \equiv -w_k^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_k^{(r)} + v_k^{(1)} + \dots + v_k^{(f-1)} \equiv -w_k^{(r)}. \end{array} \right. \quad (1.)$$

Um die Lösung dieser für die v linearen Gleichungen zu erleichtern, werde ich unter $v_k^{(h)}$ auch dann noch eine Grösse v_k verstehen, wenn der Index h den Werth r überschreitet; und zwar soll $v_k^{(h)}$ dann dasjenige v bedeuten, dessen oberer Index bei der Division von h durch r als Rest bleibt. Aus den obigen Gleichungen leiten sich dann zunächst folgende ab, in denen h einen beliebigen Index bedeutet:

$$w_k^{(h+1)} - w_k^{(h)} \equiv v_k^{(h)} - v_k^{(f+h)};$$

daher auch:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=s-1} \left\{ w_k^{(h+1+\lambda f)} - w_k^{(h+\lambda f)} \right\} \equiv v_k^{(h)} - v_k^{(h+sf)}. \quad (2.)$$

Nun bemerkt man, dass zwei Fälle unterschieden werden müssen. Sind nämlich f und r nicht relative Primzahlen, also etwa

$$f = g.f', \quad r = g.r',$$

wo f' , r' relative Primzahlen sind, so steht auf der rechten Seite Null, sobald man $s = r'$ macht. Man wird dann also auf Bedingungen zwischen den v geführt, und kann folgenden Satz aussprechen:

Sind f , r nicht relative Primzahlen, sondern ist $f = g.f'$, $r = g.r'$, wo f' , r' relative Primzahlen sind, so ist die obige Aufgabe nur möglich, wenn die $p(g-1)$ Bedingungen erfüllt werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_k^{(1)} + w_k^{(f+1)} + \dots + w_k^{((r'-1)f+1)} \\ \equiv w_k^{(2)} + w_k^{(f+2)} + \dots + w_k^{((r'-1)f+2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \equiv w_k^{(g)} + w_k^{(f+g)} + \dots + w_k^{((r'-1)f+g)}; \end{array} \right. \quad (3.)$$

und wenn diese Gleichungen erfüllt sind, so gestattet die Aufgabe unendlich viele Lösungen, indem die ersten $f - 1$ Systeme ganz willkürlich gewählt werden können.

Sind dagegen f, r relative Primzahlen, so kann man mittelst der Gleichung (2.) alle v_k durch irgend eines derselben ausdrücken, und erhält:

$$v_k^{(h+sf)} \equiv v_k^{(h)} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=s-1} \left\{ w_k^{(h+\lambda f)} - w_k^{(h+1+\lambda f)} \right\}. \quad (4.)$$

Addiren wir nun sämmtliche Gleichungen (1.), so findet sich

$$f \Sigma v_k \equiv - \Sigma w_k,$$

oder, wenn $\Sigma w_k = z_k$ gesetzt wird, und man bemerkt, dass sämmtliche v_k nach (4.) dasselbe Submultiplum der Perioden, ihre Summe also das r -fache eines solchen enthalten muss:

$$v_k^{(1)} + v_k^{(2)} + \cdots + v_k^{(r)} \equiv -\frac{z_k}{f} + \frac{rA_k}{f}.$$

Setzen wir in diese Gleichung die oben in (4.) erhaltenen Werthe der v ein, so kommt:

$$\begin{aligned} r v_k^{(h)} + \sum_{s=1}^{s=r-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=s-1} \left(w_k^{(h+\lambda f)} - w_k^{(h+1+\lambda f)} \right) &\equiv -\frac{z_k}{f} + \frac{rA_k}{f} \\ \equiv r v_k^{(h)} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r-2} (r - \lambda - 1) \left(w_k^{(h+\lambda f)} - w_k^{(h+1+\lambda f)} \right). \end{aligned}$$

Führt man also endlich die Bezeichnung ein:

$$z_k^{(h)} = (r-1)w_k^{(h)} + (r-2)w_k^{(h+f)} + \cdots + 1.w_k^{(h+(r-2)f)}, \quad (5.)$$

so ergibt sich:

$$v_k^{(h)} \equiv -\frac{z_k}{rf} + \frac{z_k^{(h+1)} - z_k^{(h)}}{r} + \frac{A_k}{f}. \quad (6.)$$

Durch diese Formel ist die Lösung der Aufgabe vollständig gegeben, da man aus den gefundenen Werthen der v die Punkte der Systeme mittelst Gleichungen p^{ten} Grades berechnet. Da in den A die Zahlen m, q alle Werthe von 0 bis $f - 1$ erhalten dürfen, so erhält man das Resultat:

Wenn f, r relative Primzahlen sind, so ist die Aufgabe auf f^{2p} Arten lösbar.

Diese Aufgabe hat Steiner a. a. O. nicht behandelt; wohl aber bei ebenen Curven dritter Ordnung ($p = 1$) einen besonderen Fall des oben als unbestimmt erkannten Problems. Man kann nämlich festsetzen, dass die $r = gr'$ Gruppen nicht sämmtlich verschieden sein sollen, sondern dass nur g

verschiedene Gruppen existiren, welche r' mal hinter einander in derselben Reihenfolge benutzt werden. Man kann ferner festsetzen, dass die Anzahl der Punkte jeder Gruppe gleich p sei, wie in den Systemen, dass also

$$mnk = p(f+1).$$

Aehnlich wie in §. 16 ergibt sich dann

$$k = \frac{p}{2}.s, \quad f = \frac{mn}{2}.s - 1,$$

wenn eine der Zahlen m, n von der Form $4h + 2$, die andere ungerade ist; und

$$k = ps, \quad f = mns - 1$$

in jedem anderen Falle. Die Gleichungen (3.) gehen dann über in:

$$r'.w_k^{(1)} \equiv r'.w_k^{(2)} \dots \equiv r'.w_k^{(g)},$$

und wenn also die erste Gruppe beliebig angenommen wird, so bestimmen sich die Punkte der übrigen Gruppen den Gleichungen

$$\begin{aligned} w_k^{(2)} &\equiv w_k^{(1)} + \frac{A_k}{r'}, \\ w_k^{(3)} &\equiv w_k^{(1)} + \frac{A'_k}{r'}, \\ &\dots \dots \dots \\ w_k^{(g)} &\equiv w_k^{(1)} + \frac{A_k^{(g-2)}}{r'} \end{aligned}$$

entsprechend durch ebensoviel Gleichungen p^{ten} Grades. In diesen Gleichungen können den in den A vorkommenden Zahlen m, q die Werthe $0, 1, \dots, r' - 1$ beigelegt werden; doch so, dass niemals zwei Systeme der A mit ungleichen oberen Indices gleich werden. Die Anzahl aller möglichen, zu einer gegebenen gehörigen Reihen von Gruppen ist also:

$$\frac{r'^{2p} - 1.r'^{2p} - 2 \dots r'^{2p} - (g-1)}{1.2 \dots (g-1)}.$$

Unter diesen Lösungen der Aufgaben sind aber, wenn r' keine Primzahl ist, auch solche enthalten, bei denen der Kreis von Flächen sich früher als nach r' maliger Benutzung aller Gruppen schliesst, und welche daher für das vorliegende Problem nur insofern mitzählen, als die dabei gebildete Reihe von Flächen mehrfach gerechnet wird.

Dieses ist die unmittelbare Erweiterung des angeführten *Steinerschen* Problems, welches, wie man sieht, für alle ebenen und doppelt gekrümmten Curven eintritt, und in allen Fällen nach den hier entwickelten Principien mit

Leichtigkeit gelöst wird. Auch für die gegenseitige Lage der aus den einzelnen Lösungen erhaltenen Punktgruppen existiren ähnliche Sätze, wie ich sie bezüglich des ursprünglichen *Steinerschen* Problems in der angeführten Abhandlung entwickelt habe. Ein genaueres Eingehen in diese Verhältnisse würde hier zu weit führen; auch scheint es, als ob bei so allgemeinen Problemen vorzüglich die Einsicht von Interesse ist, dass ihre Lösung in einer bestimmten

Weise aus gegebenen Principien abgeleitet werden könne, weniger aber die Entwicklung der dabei eintretenden Umstände, welche der Natur der Sache nach nicht anders als weitläufig sein kann, wenn sie einigermaßen erschöpfend sein soll. —

Ich benutze diese Gelegenheit, um eine Bemerkung bezüglich meiner Abhandlung „über eine Classe von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen“ (Bd. 62, p. 232 dieses Journals) nachzutragen. Gleichungen der betrachteten Art sind bereits früher von *Hermite* in den Comptes Rendus der Pariser Akademie, 1855, zweites Semester, untersucht worden, wo sich die Eigenschaft derselben, nur reelle Wurzeln zu besitzen, angegeben findet.

Giessen, den 28. October 1863.