

Géométrie. — Sur les surfaces algébriques. Note de M. A. Clebsch, présentée par M. Chasles.

«Les théorèmes de M. Riemann sur les fonctions algébriques à deux variables ont donné un principe pour classer les courbes algébriques. J'ai proposé de nommer *genre* d'une courbe le nombre $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ (*deficiency* de M. Cayley), n étant l'ordre de la courbe, d le nombre de ses points doubles ou de rebroussement. Le genre de deux courbes algébriques doit être le même pour que l'on puisse faire correspondre à chaque point de l'une un seul point de l'autre, et réciproquement. Toutes les courbes du même genre peuvent être transformées algébriquement dans une espèce particulière de ce genre, laquelle a un nombre suffisant de coefficients arbitraires; pour $p > 2$, ces *courbes normales* sont de l'ordre $p+1$, et le nombre de leurs points doubles ou de rebroussement est égal à $\frac{p(p-3)}{2}$. (Voir Clebsch und Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen*.)

»Maintenant j'ai trouvé que, pour les surfaces algébriques, il y a des théorèmes tout à fait analogues. Je suis parvenu à démontrer le théorème suivant:

«Soient données deux surfaces $f = 0$ et $\varphi = 0$ des ordres m et n respectivement. Supposons que l'on puisse faire correspondre à chaque point de $f = 0$ un seul point de $\varphi = 0$ et réciproquement, de sorte que ces surfaces soient transformables l'une dans l'autre d'une manière algébrique et rationnelle. Supposons, pour plus de simplicité, que ces surfaces n'aient que des singularités régulières, c'est-à-dire des singularités qui se trouvent sur chaque surface ou sur sa réciproque. Alors soit p le nombre de coefficients arbitraires d'une surface de l'ordre $n-4$ passant par les courbes doubles ou de rebroussement qui se trouvent sur $f = 0$, et p' le nombre correspondant eu égard à $\varphi = 0$. On aura toujours $p' = p$.»

»Ce théorème nous permet de classer ces surfaces eu égard à leur *genre* p . Deux surfaces devront appartenir au même genre pour être transformées l'une en l'autre d'une manière rationnelle. Lorsqu'une surface donnée n'a aucune courbe double ou de rebroussement, son genre sera égal à $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, tous les coefficients de la surface de l'ordre $n-4$ étant arbitraires. Au contraire, lorsqu'il n'y a aucune surface de l'ordre $n-4$, qui passe par les courbes doubles et de rebroussement de la surface donnée de l'ordre n , cette surface appartiendra au genre $p = 0$. A ce genre appartiennent toutes les surfaces qui peuvent être transformées dans un plan; ce qui se fait pour la plupart des surfaces que l'on a considérées actuellement, et dont M. Chasles, M. Cremona et moi-même avons offert des exemples assez nombreux.

»Lorsque la surface réciproque d'une donnée appartient au même genre, on a le théorème spécial:

«Étant donnée une surface de l'ordre n et de la classe k , le nombre de coefficients indéterminés d'une surface de l'ordre $n-4$ passant par les courbes doubles ou de rebroussement de la surface donnée, est égal au nombre de coefficients indéterminés d'une surface de la classe $k-4$, qui a pour plans tangents tous les

plans tangents doubles de la surface donnée.»