

XXXIV. Metodo per misurare la lemniscata

Schediasma II (*)

(*) *Giornale de' letterati d'Italia, tomo XXX, pag. 87.*

Teorema I. — Sieno le due infrascritte equazioni (1), e (2), io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$x = \frac{\sqrt{1 \mp \sqrt{1 - z^4}}}{z}. \quad (1)$$

$$\frac{\pm dz}{\sqrt{1 - z^4}} = \frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}}. \quad (2)$$

Dimostrazione. — L'equazione (1) differenziata somministra un valore di dx , ch'essendo ridotto ad una semplice espressione fa conoscere

$$dx = \frac{\pm dz \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - z^4}}}{z^2 \sqrt{1 - z^4}}.$$

Dalla medesima equazione (1) si deduce ancora la seguente

$$\frac{\sqrt{1 + x^4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 \mp \sqrt{1 - z^4}}}{z^2}.$$

E dividendo la penultima equazione per quest'ultima si giunge all'equazione (2).

Il che dovea dimostrarsi.

Teorema II. — Sieno le due equazioni infrascritte (3), e (4); io dico, che posta la prima di essa sussiste anche l'altra

$$x = \frac{\sqrt{1 \mp z}}{\sqrt{1 \pm z}}. \quad (3)$$

$$\frac{\mp dz}{\sqrt{1 - z^4}} = \frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}}. \quad (4)$$

Dimostrazione. — Differenziando l'equazione (3), e operando nel debito modo, si à $dx = \frac{\pm dz}{\sqrt{1 - z^2}} \times \frac{1}{1 \pm z}$.

Inoltre la stessa equazione (3) mostra $\frac{\sqrt{1 + x^4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 + z^2}}{1 \pm z}$.

E dividendo la penultima equazione per quest'ultima si ottiene la equazione (4).

Il che dovea dimostrarsi.

Teorema III. — Sieno le due equazioni infrascritte (5), e (6); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$x = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}}. \quad (5)$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}. \quad (6)$$

Dimostrazione. — Dall'equazione (5) differenziata, e maneggiata a dovere risulta $\frac{dx}{\sqrt{2}} = \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \times \frac{1+u^4}{1-u^4}$ e dalla suddetta equazione (5) si deduce $\sqrt{1+x^4} = \frac{1+u^4}{1-u^4}$.

Dividendo poscia la penultima equazione per quest'ultima, si arriva all'equazione (6).

Il che dovea dimostrarsi.

Teorema IV. — Sieno le due infrascritte equazioni (6), e (8); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$x = \frac{\sqrt{1-t^4}}{t\sqrt{2}}. \quad (7)$$

$$\frac{-dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}. \quad (8)$$

Dimostrazione. — Differenziando l'equazione (7), e riducendo il valore di dx ad una comoda espressione, ritrovasi $dx\sqrt{2} = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^4}} \times \frac{1+t^4}{t^2}$.

La stessa equazione (7) fa vedere $2\sqrt{1+x^4} = \frac{1+t^4}{t^2}$.

E la penultima equazione divisa per quest'ultima rende l'equazione (8).

Il che dovea dimostrarsi.

Scolio I. — Per far uso di questi teoremi si noti:

Primo, che $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ rappresenta l'arco diretto CS della lemniscata (fig. 29) sostenuto dalla corda $CS = z$, purchè il semiasse CL di questa curva sia eguale all'unità.

Secondo, che $\int \frac{-dz}{\sqrt{1-z^4}}$ esprime l'arco inverso SL della medesima curva, che corrisponde alla suddetta corda $CS (z)$.

Terzo, che $\int \frac{dz}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{3}{2} \int dx \sqrt{1+x^4} - \frac{1}{2} \sqrt{1+x^4}$, come si prova col calcolo.

Quarto, che $\int dx \sqrt{1+x^4}$ esprime l'arco AQ (fig. 30) della parabola cubica primaria corrispondente all'abscissa $AF = x$, purchè prendendo a per l'unità, il parametro di questa parabola sia $a\sqrt{3}$, e le ordinate sieno normali all'abscissa.

Quinto, che $x\sqrt{1+x^4}$ denota la porzione QV della tangente (fig. 30) compresa tra l'ordinata FQ , e la retta indefinita AV , che dalla origine A della parabola scorre parallela alle ordinate.

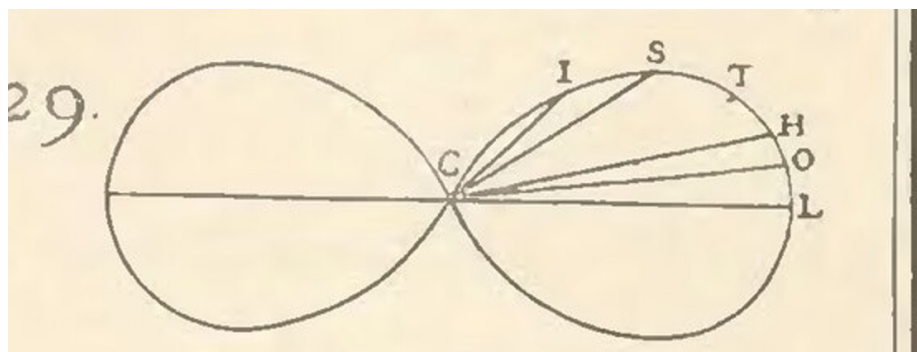


Figure 1: Fig. 29.

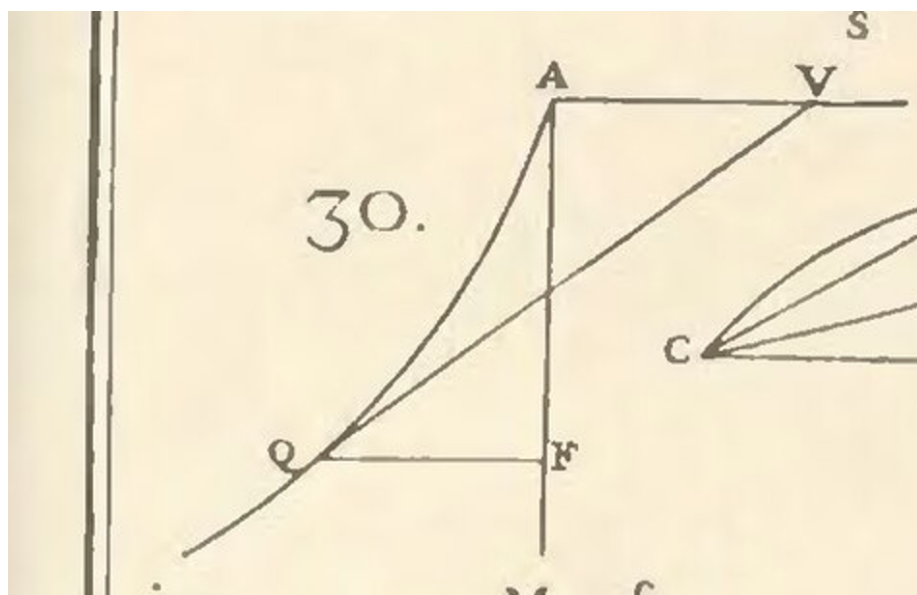


Figure 2: Fig. 30.

Sesto che per conseguenza si avrà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{3}{2} \text{arc. } AQ - \frac{1}{2} QV.$$

Esempj per mostrare il modo di applicare alla geometria i precedenti teoremi.

Esempio I pel I teorema (fig. 29, e 30). — Nell'equazione (1) il segno arbitrario $\mp$ significhi il segno negativo, s'integri l'equazione (2) mediante il precedente scolio, e si troverà

$$\text{Arc. } CS = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{arc. } AQ - \frac{1}{\sqrt{2}} QV.$$

Annullando $AF(x)$, si annullerà anche $CS(z)$, e però questa equazione è completa.

Esempio II pel II teorema (fig. 29, e 30). — Nell'equazione (3) il segno $\mp$ rappresenta il segno negativo, s'integri l'equazione (4), e si scoprirà

$$\text{Arc. } SL = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{arc. } AQ - \frac{1}{\sqrt{2}} QV.$$

La supposizione di $CS(z) = 1$, che annienta l'arco inverso SL , rende $AF(x) = 0$, e però quest'equazione è completa.

Scolio II. — Nel progresso di questo scritto io non proverò più, che l'equazioni sono complete, dovendo bastare ai lettori il metodo, con cui mi sono regolato in questi due esempj per accertarsi da loro medesimi della pienezza dell'equazioni seguenti; essi potranno ancora servirsi dei quattro antecedenti teoremi per trarne altre maniere di misurare la lemniscata mediante l'estensione della parabola cubica primaria, non ommettendo però, dov'è d'uopo, la sottrazione, o l'aggiunta della quantità costante propria a rendere complete l'equazioni.

Potranno inoltre dedurre da questi teoremi delle verità affatto nuove, concernenti la comparazione degli archi della suddetta parabola, ec.

Io mi contenterò di accennare, che siccome la misura della parabola cubica primaria dipende in più maniere dall'estensione della lemniscata in virtù dei quattro antecedenti teoremi, e la misura della lemniscata dipende dall'estensione dell'iperbola equilatera, e d'una specie di elisse *unitamente*, conforme è scoperto nel I schediasma, ne segue, che la misura della parabola cubica primaria dipende in più maniere dalla estensione delle due suddette sezioni coniche *unitamente*. Quest'invenzione non potrà non piacere a chi avrà considerato ciò, che si legge negli Atti di Lipsia dell'anno 1695, pag. 64, e pag. 184 verso il fine.

Teorema V. — Sieno le due equazioni infrascritte (9), e (10); io dico, che posta la prima di esse sussiste anche l'altra

$$\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{z} \sqrt{1 - \sqrt{1-z^4}}. \quad (9)$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2 du}{\sqrt{1-u^4}}. \quad (10)$$

Dimostrazione. — Ponendo nell'equazione (1) del I teorema in vece di $\mp$ il segno negativo, e in cambio di x il suo valore $\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}}$ notato nell'equazione (5) del III teorema, si à l'equazione (9), indi surrogando nell'equazione (2) del I teorema in luogo di $\frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$ il suo valore $\frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}$, che nasce dalla supposizione fatta di x (come si vede, moltiplicando per 2 l'equazione (6) del III teorema) ne viene l'equazione (10).

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I (fig. 29). — Chiamisi z la corda CS della lemniscata, ed u l'altra corda CI , e integrando l'equazione (10), si troverà

$$\text{Arc. } CS = 2 \text{ arc. } CI.$$

Laonde considerando la lettera z come cognita nell'equazione (9), se ne trarrà il valore della corda $CI(u)$ che taglia per mezzo l'arco diretto CS .

Corollario II (fig. 29). — Dall'equazione (9) nasce quest'altra

$$z = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}. \quad (11)$$

E questo valore di z è tale, che chiamando u la corda CI considerata come cognita, e facendo l'altra corda CS eguale al secondo membro dell'equazione (11) l'arco diretto CS è doppio dell'altro arco diretto CI .

Teorema IV. — Sieno le due equazioni infrascritte (12), e (13); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$\frac{\sqrt{1-t^4}}{t\sqrt{2}} = \frac{1}{z} \sqrt{1 - \sqrt{1-z^4}}. \quad (12)$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\frac{2dt}{\sqrt{1-t^4}}. \quad (13)$$

Dimostrazione. — Ponendo nell'equazione (1) del I teorema in vece di $\mp$ il segno negativo, e in cambio di x il suo valore $\frac{1}{t\sqrt{2}}\sqrt{1-t^4}$ notato nell'equazione (7) del IV teorema, si à l'equazione (12). Sostituendo poi nell'equazione (2) del I teorema in luogo di $\frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$ il suo valore $\frac{-2dt}{\sqrt{1-t^4}}$, che deriva dalla supposizione fatta di x (come apparisce moltiplicando per 2 l'equazione (8) del IV teorema) s'ottiene l'equazione (13).

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario I (fig. 29). — Si nomini z la corda CS della lemniscata, e (t) l'altra corda CH , e ne risulterà $\text{arc. } CS = 2 \text{ arc. } HL$.

Corollario II (fig. 29). — Ordinando l'equazione (12), e ponendo in essa u in cambio di z , ed r in vece di t , si giunge a quest'altra

$$u = \frac{2r\sqrt{1-r^4}}{1+r^4}. \quad (14)$$

Di modo che nominando r la corda CO , e assumendo l'altra corda $CI(u)$ eguale al secondo membro dell'equazione (14) l'arco diretto CI sarà doppio dell'arco inverso OL .

Problema I. — Tagliare in tre parti uguali il quadrante della lemniscata.

Soluzione (fig. 29, e 31). — In virtù del teorema VI, e suo I corollario l'arco diretto CS (fig. 29) sarà doppio dell'arco inverso HL , purchè chiamando t la corda CH , e z l'altra corda CS si abbia l'equazione (12). Suppongasi ora, che i due punti S , e H coincidano in T , e questa supposizione renderà $CS(z) = CH(t)$, e l'arco diretto CT (fig. 31) sarà doppio dell'arco inverso TL , che diverrà la terza parte del quadrante.

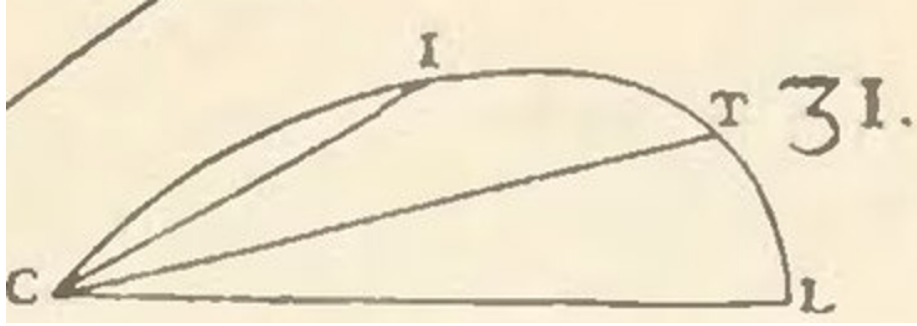


Figure 3: Fig. 31.

Ma supponendo $t = z$ nell'equazione (12), e poscia ordinandola nel debito modo, ec., si ottiene

$$z = \sqrt[4]{-3 + 2\sqrt{3}}.$$

Laonde attribuendo alla corda CT (fig. 31) questo valore di z , e pigliando l'arco diretto CI eguale all'arco inverso TL mediante il III teorema del I schediasma, si avrà lo scioglimento del problema.

Il che dovea ritrovarsi.

Problema II. — Tagliare in cinque parti uguali il quadrante della lemniscata. **Soluzione** (fig. 29, e 31). — Chiamisi u la corda CI (fig. 29) della lemniscata, e z l'altra corda CS , facciasi $z = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$, e l'arco CS sarà doppio dell'arco CI pel secondo corollario del V teorema. Si nomini poscia r la corda CO (fig. 29); suppongasi la corda $CI(u) = \frac{2r\sqrt{1-r^4}}{1+r^4}$, e l'arco diretto CI sarà doppio dell'arco inverso OL pel II corollario del VI teorema; dunque l'arco diretto CS sarà quadruplo dell'arco inverso OL .

Suppongasi ora $CS(z) = CO(r)$, i punti S , ed O coincideranno in T , l'arco TL (fig. 32) sarà un quinto del quadrante, l'arco $CI = 2$ arc. TL conterrà due quinti dello stesso quadrante, e l'arco $IT =$ arc. CI ne conterrà gli altri due quinti.

Prendasi poscia mediante il III teorema del I schediasma l'arco inverso EL (fig. 32) eguale all'arco diretto CI , e l'arco diretto CB eguale all'arco inverso TL , e i punti B, I, E, T taglieranno il quadrante in cinque parti eguali.

Resta solo a trovare il valore preciso della corda CT (fig. 32) eguale nello stesso tempo a z , e a r , e questo si troverà sostituendo nell'equazione (14) in luogo di r la lettera z , mentre si avrà

$$u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}. \quad (15)$$

E ponendo questo valore di u nell'equazione (11) si giungerà a un'altra equazione, la quale non conterrà altr'incognita che la lettera z , e dovrà reputarsi un'equazione dell'ottavo grado, poichè se in essa si supporrà $z^4 = b$, ne risulterà una nuova equazione appunto dell'ottavo grado; il calcolo sarà più lungo, che difficile, purchè non si trascurino quelle maniere di facilitarlo, che sono ben note ai periti analisti, e però stimo superfluo di stenderlo in questo scritto. Avvertirò solamente, che nell'equazione espressiva del valore di z^4 la medesima quantità di z^4 avrà due valori veri minori di a^4 ; il maggiore di questi due valori esprimerà il quadratoquadrato di $CT(z)$, e il minore di essi esprimerà il quadratoquadrato di $CI(u)$; imperciocchè se nell'equazione (15) si porrà invece di z il suo valore in u tratto dall'equazione (11), si troverà una equazione affatto simile a quella, ch'esprime il valore di z^4 , ec.

Il che dovea ritrovarsi.

Il fu signor marchese de l'Hospital nel suo eccellente *Trattato delle sezioni coniche*, lib. 9, prop. 9 insegna un modo di costruire l'equazioni dell'ottavo grado.

Teorema VII. — Sieno le due equazioni infrascritte (16), e (17); io dico, che posta la prima di esse sussiste anche l'altra

$$\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}. \quad (16)$$

$$\frac{-dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}. \quad (17)$$

Il che dovea dimostrarsi.

Dimostrazione. — Nell'equazione (3) del II teorema il segno $\mp$ rappresenti il segno negativo, e in vece di x vi si ponga il suo valore $\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}}$ notato nell'equazione (5) del III teorema, e si avrà l'equazione (16). Si surroggi poi nell'equazione (4) del II teorema in luogo di $\frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$ il suo valore $\frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}$, che proviene dalla supposizione fatta di x (come mostra l'equazione (6) del III teorema moltiplicata per 2), e si avrà l'equazione (17).

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario (fig. 29). — Chiamando z la corda CS della lemniscata, ed u l'altra corda CI , e poscia integrando l'equazione (17), si ottiene $\text{Arc. } SL = 2 \text{ arc. } CI$.

Purchè u , e z abbiano il valore, che si deduce dall'equazione (16).

Problema III (fig. 33). — Sia diviso per mezzo in M il quadrante della lemniscata; e sia dato l'arco diretto CB minore della metà del quadrante: trovare l'arco intermedio MI eguale all'arco diretto dato CB .

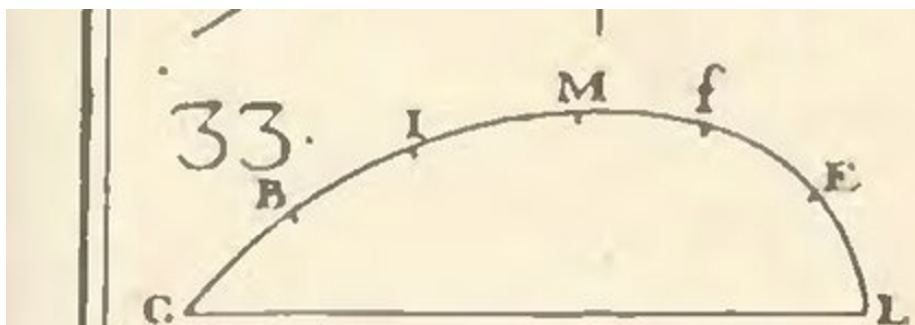


Figure 4: Fig. 33.

Soluzione. — I. Prendasi, mediante il teorema VII, e suo corollario, l'arco inverso EL doppio dell'arco diretto dato CB . II. Prendasi, mediante il teorema V, e suo I corollario, l'arco diretto CI suddoppio dell'arco diretto CE . Egli è visibile, che la somma degli archi $CB + CI$ essendo eguale alla metà della somma degli archi $CE + EL$, sarà per conseguenza eguale alla metà del quadrante; dunque

$$\text{arc. } CB + \text{arc. } CI = \text{arc. } CM,$$

e togliendo dall'uno, e l'altro membro di questa equazione l'arco comune CI , resta $\text{arc. } CB = \text{arc. } MI$.

Il che dovea dimostrarsi.

Corollario (fig. 33). — Prendasi mediante il III teorema del I schediasma l'arco inverso FL eguale all'arco diretto CI , e si avrà

$$\text{arc. } Mf = \text{arc. } MI = \text{arc. } CB.$$

Teorema VIII. — Sieno le due equazioni infrascritte (18), e (19); io dico, che posta la prima di esse sussiste anche l'altra

$$\frac{\sqrt{1-t^4}}{t\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}}. \quad (18)$$

$$\frac{-dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\frac{2dt}{\sqrt{1-t^4}}. \quad (19)$$

Dimostrazione. — Nell'equazione (3) del II teorema il segno $\mp$ rappresenti il segno negativo, e in vece di x vi si ponga il suo valore $\frac{\sqrt{1-t^4}}{t\sqrt{2}}$ espresso nell'equazione (7) del IV teorema, e si avrà l'equazione (18). Sostituiscasi poscia

nell'equazione (4) del II teorema in cambio di $\frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$ il suo valore $-\frac{2dt}{\sqrt{1-t^4}}$, che risulta dalla supposizione fatta di x (conforme dimostra l'equazione (8) del IV teorema moltiplicata per 2) e si giungerà all'equazione (19).

Corollario (fig. 29). — Nominando z la corda CS della lemniscata, e (t) l'altra corda CH , attribuendo a z , e a t i loro debiti valori dedotti dall'equazione (18), e integrando l'equazione (19) si scuopre l'arco inverso SL eguale al doppio dell'arco inverso HL .

Scolio III. — Dai teoremi V, VI, VII, e VIII, e loro corollarj potranno dedurre i lettori dei modi di tagliare per mezzo il quadrante della lemniscata affatto uniformi alla maniera di ciò fare da me scoperta nel I schediasma, e questo servirà per prova della giustezza, e fecondità del mio metodo.

Problema IV. — Posto, che il quadrante della lemniscata sia tagliato in un dato numero di parti eguali, suddividere in due porzioni parimenti uguali ciascuna di dette parti.

Soluzione. — Per maggior chiarezza, e brevità si chiamino archi diretti impari quegli archi diretti della lemniscata, che contengono un numero impari delle parti eguali di essa. In virtù del I corollario del V teorema si prendano gli archi diretti suddupli di tutti gli archi impari; indi pel I corollario del III teorema del I schediasma si trovino gli archi inversi eguali a tutti questi archi diretti suddupli, e si otterrà l'intento.

Il che dovea ritrovarsi.

Scolio IV. — Dall'VIII teorema potranno dedurre i lettori un'altra maniera simile di sciorre questo problema, che io per brevità tralascio.

Corollario. — Poichè nel I schediasma è insegnato il modo di tagliare il quadrante della lemniscata in due parti eguali, e nel I, e II problema del presente scritto è trovata la maniera di segare il medesimo quadrante in tre, e cinque parti eguali; ne segue in vigore dello scioglimento di questo problema, che il quadrante della lemniscata potrà dividersi algebricamente in tante parti eguali, quanti numeri si contengono in queste tre formole, cioè: 2×2^m ; 3×2^m ; 5×2^m , nelle quali l'esponente m significa qualunque numero intiero positivo.

E questa è una nuova, e singolare proprietà della mia curva.