

XXXII. Metodo per misurare la lemniscata

Schediasma I (*)

(*) *Giornale de' letterati d'Italia, tomo XXIX, pag. 258.*

I due sommi geometri signor Giacomo e signor Giovanni fratelli Bernulli ànno renduta celebre la lemniscata, servendosi de' suoi archi per costruire l'isocrona paracentrica, come può vedersi negli Atti di Lipsia dell'anno 1694. Egli è visibile, che misurando la lemniscata mediante qualche altra curva di lei più semplice, si ottiene una costruzione più perfetta non solo dell'isocrona paracentrica, ma ancora delle altre infinite curve, che per essere costruite possono dipendere dalla lemniscata; e però mi lusingo, che non sieno per dispiacere agl'intendenti le misure di questa curva da me scoperte, le quali esporrò successivamente in due schediasmi.

Supposizioni note agl'intendenti del calcolo infinitesimale. — Sia la lemniscata $CQACFC$ (fig. 24), il cui semiasse $CA = a$; si sa, che prendendo nel centro C l'origine dell'abscisse (x), e chiamando (y) le ordinate che sono all'asse normali, la natura della lemniscata s'esprime con quest'equazione $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$.

Si sa ancora che se si chiama z la corda indeterminata $CQ = \sqrt{x^2 + y^2}$, si à l'arco diretto $CQ = \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$, e l'arco inverso

$$QA = \text{arc. } CA - \text{arc. } CQ = \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}.$$

Sia l'elisse $ADFNA$ (fig. 24), il cui semiasse minore $CF = a$, e il semiasse maggiore $CD = a\sqrt{2}$; chiamasi z l'abscissa indeterminata CH , che ha l'origine del centro C dell'elisse, ed è uguale alla corda CQ della lemniscata, e tirisi l'ordinata HI parallela all'asse maggiore; è già noto che l'arco diretto DI di quest'elisse ha per sua espressione

$$\int dz \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

e che l'arco inverso

$$IF = \text{arc. } DF - \text{arc. } DI = \int -dz \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

Sia finalmente l'iperbola equilatera LMP (fig. 25), il cui semiasse $SM = a$. Si nomini t l'applicata indeterminata SO , che partendo dal centro S tagli l'arco MO ; si sa, che questo medesimo arco s'esprime così

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^4 - a^4}}.$$

Teorema I. — Sieno le due infrascritte equazioni (1), e (2). Io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

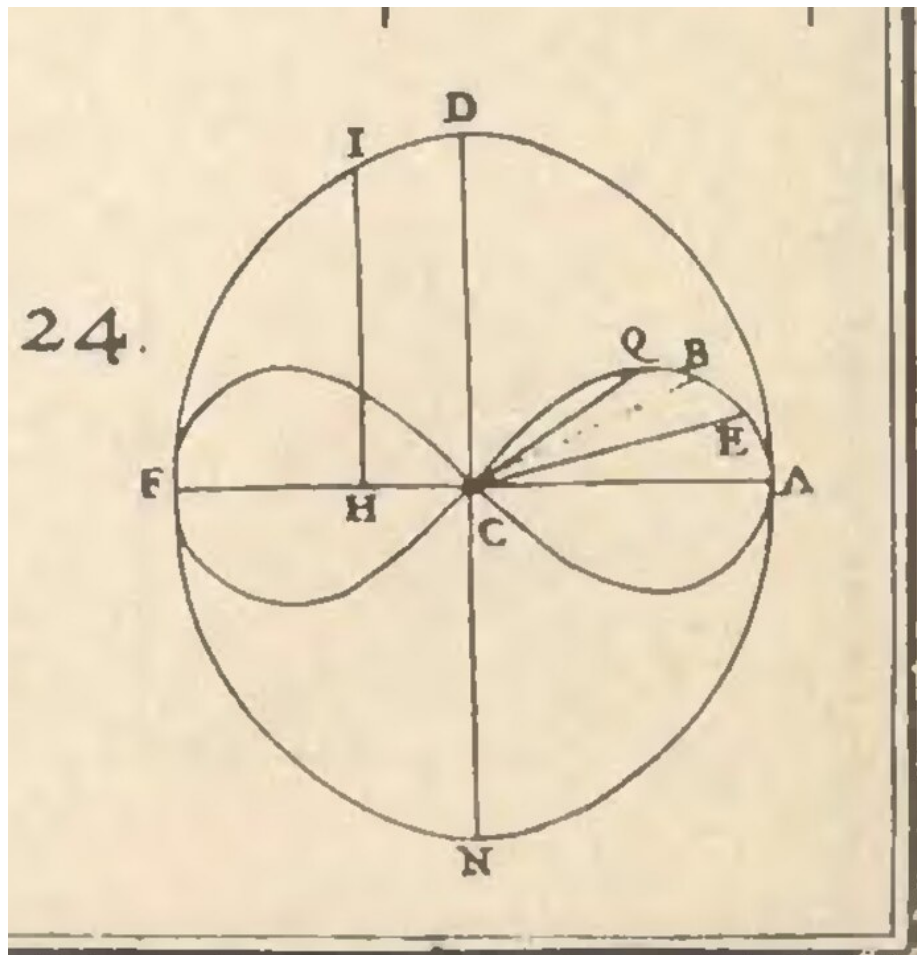


Figure 1: Fig. 24.

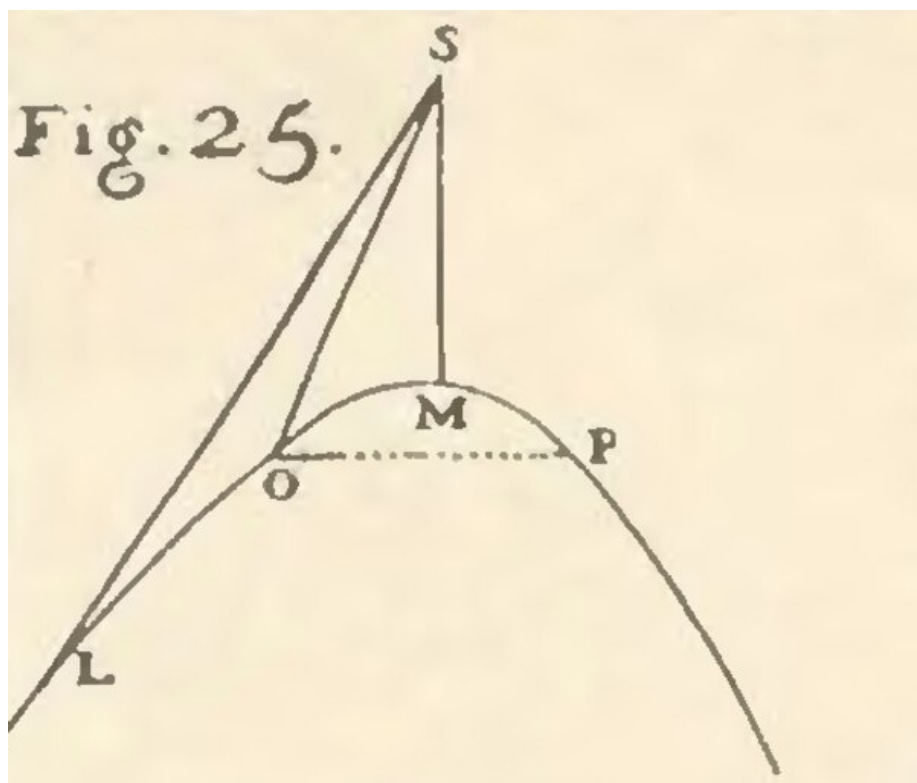


Figure 2: Fig. 25.

$$t = a \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}. \quad (1)$$

$$\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int dz \frac{\sqrt{a^2 + zz}}{\sqrt{a^2 - az}} + \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^4 - a^4}} - \frac{zt}{a}. \quad (2)$$

La verità di questo teorema si dimostra differenziando, e sostituendo in luogo di t , e di dt i loro valori in z , e dz tratti dall'equazione (1).

Corollario (fig. 24 e 25). — Se nella lemniscata la corda $CQ = z$, e nell'elisse l'ascissa CH è anche essa $= z$, e nell'iperbola equilatera LMP l'applicata centrale $SO = t$; assegnando a t il suo valore espresso nell'equazione (1) e ponendo nell'equazione (2) gli archi delle curve invece delle loro espressioni già dichiarate nelle supposizioni superiori, s'ottiene

$$\text{Arc. } CQ = \text{arc. } DI + \text{arc. } MO = \frac{zt}{a}. \quad (3)$$

Scolio I. — Supponendo $z = 0$, gli archi diretti CQ della lemniscata, e DI dell'elisse sono uguali a zero; è nullo ancora l'arco iperbolico MO , poichè in virtù dell'equazione (1) l'annullamento di z rende $SO(t) = a = SM$; s'annienta eziandio l'espressione rettilinea, e tutto ciò è un certo indizio, che l'equazione (3) è completa, e non abbisogna dell'aggiunta, o sottrazione d'alcuna quantità costante. Ma facendo $z = a$, allora l'arco diretto della lemniscata diventa eguale all'arco CQA , e l'arco ellittico DI all'arco DIF ; ma per l'equazione (1) l'applicata centrale $SO(t)$ dell'iperbola diviene in questo caso infinita, rendendo infinito anche l'arco iperbolico MO , e però sembra impossibile di giungere a conoscere per questa strada il valore del quadrante della lemniscata espresso in quantità finite, e per conseguenza la misura di questa curva non può dirsi ancora perfettamente scoperta.

Teorema II. — Sieno le due equazioni infrascritte (4) e (5); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$r = \frac{a^2}{z}. \quad (4)$$

$$\int -\frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int -dz \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^4 - a^4}} - \frac{1}{z} \sqrt{a^4 - z^4}. \quad (5)$$

La differenziazione e la sostituzione de' valori di r , e dr in z , e dz dedotti dall'equazione (4) dimostrano questo teorema.

Corollario I (fig. 24 e 25). — Facciasi, come sopra, nella lemniscata la corda $CQ = z$, nell'elisse l'ascissa CH anch'essa $= z$, e nell'iperbola l'applicata centrale $SL = r$, attribuendo ad r il suo valore notato nell'equazione (4), e surrogando nell'equazione (5) gli archi delle curve in vece delle loro espressioni, conforme si è fatto nel corollario del I teorema, ritrovansi

$$\text{Arc. } QA = \text{arc. } IF + \text{arc. } ML - \frac{1}{z} \sqrt{a^4 - z^4}. \quad (6)$$

Scolio II. — La supposizione di $z = a$ rende nulli gli archi inversi QA della lemniscata, ed IF dell'elisse; annulla ancora l'espressione rettilinea, e l'arco iperbolico ML , atteso che in vigore dell'equazione (4) l'applicata centrale dell'iperbola $SL(r)$ diviene uguale al semiasse $SM(a)$, dunque l'equazione (5) è completa. Ma la supposizione di $z = 0$, prolunga in infinito l'applicata centrale dell'iperbola, e l'arco, di essa, nello stesso tempo, che fa divenire gli archi inversi della lemniscata, e dell'elisse uguali rispettivamente ai quadranti ACQ , FID ; ed ecco rinascere il medesimo inconveniente esposto nel fine del I scolio; ma questa difficoltà resterà superata dal corollario, che segue. Intanto si noti; primo, che tirando nell'iperbola la OP parallela al secondo asse, l'arco LMP è uguale ai due archi MO , ML . Secondo, che assegnando a t il suo valore espresso nell'equazione (1), questa quantità complessa $\frac{zt}{a} + \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}$

equivale a quest'altra quantità più semplice $\frac{at}{z}$, come si esprimerà col calcolo. **Corollario II** (fig. 24 e 25). — Aggiungendo le due equazioni (3) e (6), e servendosi dei due avvertimenti notati nel fine del precedente scolio, si scuopre $\text{arc. } CQA = \text{arc. } DIF + \text{arc. } LMP - \frac{at}{z}$; e finalmente moltiplicando per 4 quest'ultima equazione, ritrovasi che l'intera periferia della lemniscata è uguale all'intera periferia dell'elisse circoscritta $ADFNA$, più il quadruplo dell'arco LMP dell'iperbola equilatera meno $\frac{4at}{z}$ ch'è una nuova, ed egregia proprietà di queste curve.

Teorema III. — Sieno le due equazioni infrascritte (7) e (8); io dico, che posta la prima di esse, sussiste anche l'altra

$$u = a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (7)$$

$$\int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int -\frac{a^2 du}{\sqrt{a^4 - u^4}}. \quad (8)$$

Questo teorema si dimostra, come gli altri due, che lo precedono, differenziando, e facendo le debite sostituzioni tratte dall'equazione (7).

Corollario I (fig. 24). — Prendasi nella lemniscata la corda $CQ = z$, e l'altra corda $CE = u$, attribuiscesi ad u il suo valore espresso nell'equazione (7), si sostituiscano nell'equazione (8) gli archi diretto, ed inverso della curva in luogo delle loro espressioni, e si troverà $\text{arc. } CQ = \text{arc. } EA$.

Scolio III (fig. 24). — Se $z = 0$ l'arco diretto CQ è nullo, e in virtù dell'equazione (7) l'annullamento di z rende $CE(u) = a$, di modo che l'arco inverso EA è nullo anch'esso; il che fa conoscere, che l'equazione notata nel fine del precedente corollario è completa. Questa insigne proprietà della lemniscata è stata da me scoperta, ed esposta in maniera diversa nel mio metodo per rettificare la differenza degli archi in infinite specie di parabole irrettificabili.

Corollario II (fig. 24). — Trovando, come qui sopra ho insegnato di fare, l'arco inverso EA eguale all'arco diretto CQ , potrà misurarsi questo medesimo arco CQ mediante il I. corollario del II teorema, e viceversa trovando l'arco

diretto CQ eguale all'arco inverso EA , potrà essere misurato questo medesimo arco EA per mezzo del corollario del I teorema. **Corollario III.** — **Problema.** — Tagliare per mezzo il quadrante della lemniscata (fig. 24).

Se la corda $CQ(z)$ della lemniscata è uguale all'altra corda $CE(u)$ di essa, e se nel tempo stesso u ha il suo valore notato nell'equazione (7), allora $z = u = a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$, donde risulta fatte le debite operazioni

$$z = u = \sqrt{a^2 \sqrt{2} - a^2}$$

e però attribuendo a z quest'ultimo valore, i due punti della lemniscata Q ed E coincideranno in B , in maniera che l'arco diretto CB sarà eguale all'arco inverso BA , e la corda $CB = u = z$ taglierà per mezzo il quadrante della lemniscata. Il che dovea ritrovarsi.