

Jac. B. Solutio Problematis Leibnitiani

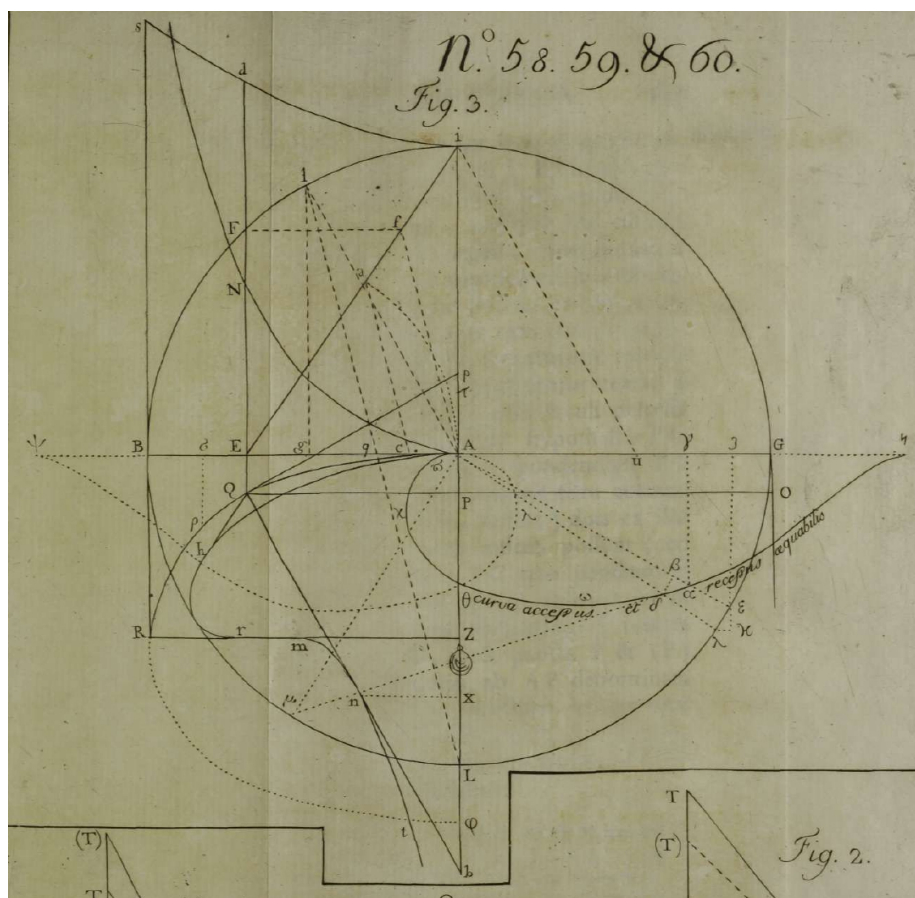
de Curva Accessus & Recessus aequabilis a puncto dato, mediante rectificatione Curvae Elasticae

Felicitatem inventi praecedentis commendare potest solutio elegantissimi Problematis *Leibnitiani*, de invenienda *Linea*, per quam descendens grave aequaliter aequalibus temporibus a dato puncto recedat, vel ad illud accedat: quod laudatissimo suo Auctori ita placuit, ut non tantum ad ejus tentamen Amicos pariter & Adversarios aliquoties in *Actis* provocarit (vid. *Anno* 1689, *Apr.* p. 198, & 1690. *Maj.* p. 229, & *Jul.* p. 360,) sed & ipse quoque strenue in illo desudarit, testibus nonnullis Curvae proprietatibus, quas *Gallorum Diario* inseri curavit, ut ex relatione *Fratris* habeo, qui tamen illas nominare mihi non potuit. Multus etiam in eodem fuit ipse *Frater*, dum *Parisiis* ageret, sed omni sua methodo Tangentium inversa aliud nil effecit, quam ut Problema ad hanc aequationem differentialem reduceret: $(x dx + y dy)\sqrt{y} = (x dy - y dx)\sqrt{a}$, ad quam tamen etiam nullo labore pervenitur. Plenariam vero illius solutionem, sive constructionem, nec ipse nec quisquam alius dare potuit. Nuper cum praecedens Schediasma pararem *Lipsiam*, partemque inventi cum figuris ipsis jamjam chartae consignassem, scrutinium hujus Lineae suscepi occasione novorum Theorematum, quae ibi dedi pro Radiis circulorum osculantium in Spiralibus (quorum tamen investigatio & ipsa incidenter tantum fiebat; praecipua enim inventi capita sub calamo demum mihi nascebantur) mox etiam post pauca conamina optatum finem consecutus sum; ubi hoc perquam singulare mihi accidit, ut absoluta analysi animadverterem, Curvam Elasticam, quae qualemcumque tantum occasionem huic tentamini dederat, illam ipsam esse, cujus rectificatione altera posset construi. Nam quamquam idem liceat exequi mediante quadratura spatii alicujus Algebraici, alterum tamen construendi modum praeferendum censeo, tum quod generaliter facilius in praxi rectificentur curvae, quam quadrentur spatia, tum praesertim quod ipsa natura (si quidem convenientem tensionis legem observet) illum praescripsisse videatur.

Constr. Descripta itaque Curva Elastica tertiae constructionis (*Fig. 3*) caeterisque positis ut prius, applicetur in utroque quadrante circuli *BL*, *LG*, recta $\varepsilon\zeta$ aequalis ipsi *Ag* seu tertiae proportionali ad *AB* & *AE* (hic in dextro tantum quadrante ducta apparet, ut linearum confusio vitetur) & ex ducta *A\varepsilon* (productaque si sit opus) abscindatur *A\alpha* aequalis tertiae proportionali ad rectam *AB* & portio-

nem Curvae *AQ* in sinistro, vel φRQ in dextro quadrante; eritque punctum α in Curva quadam $A\chi\omega\eta$, ita comparata, ut grave per illam latum (si prius ex altitudine iA deciderit) aequalibus temporibus aequaliter ad punctum *A* accedat, aut ab illo recedat. Cujus constructionis demonstrationem (ut *Celeb. Problematis* Auctorem, aliis occupatissimum, examinandi labore sublevem) hic appono.

Dem. Descriptus intelligatur centro *A* arcus $\beta\delta$, abscindens ex applicata *A\alpha* Elementum $\alpha\beta$, & ex Curva Elem. $\alpha\delta$, cui concipiatur in vertice portiuncula isochronos *A\omega*. Jam Ratio $\beta\delta$ ad $\alpha\beta$ composita est ex sequentibus 5 rationibus:



$\beta\delta$: Elem. periph. $B\varepsilon$:: $A\alpha$: $A\varepsilon$.

Elem. periph. $B\varepsilon$: Elem. $\varepsilon\zeta$:: $A\varepsilon$: $A\zeta$, ex natura Circuli.

Elem. $\varepsilon\zeta$: Elem. AE :: $2AE$: AB , per constr. & princ. calcul. in fin. parvorum.

Elem. AE : Elem. AQ (φRQ) :: $A\zeta$: AB , ex nat. curvae AQ , ut collig. ex coroll. 2. constructionis tertiae.

Elem. AQ (φRQ) : $\alpha\beta$:: AB : $2AQ$ ($2\varphi RQ$), per constr. & princ. calc. inf. parv.

unde facta divisione per communes rationum antecedentes & consequentes, $\beta\delta$: $\alpha\beta$:: $A\alpha$: $AB + AE$: AQ (φRQ ,) & $\beta\delta^2$: $\alpha\beta^2$:: $A\alpha^2$: $AB^2 + AE^2$: AQ^2 vel φRQ^2 ($\varepsilon\zeta$: $A\alpha$, per constr.) :: $A\alpha^2 \times \varepsilon\zeta$: $AB^2 \times A\alpha$:: $A\alpha \times \varepsilon\zeta$: AB^2 :: (ob similitudinem Triangulorum $Aa\gamma$, $A\varepsilon\zeta$) $A\varepsilon \times \alpha\gamma$: AB^2 :: $\alpha\gamma$: AB (Ai), componendoque $\alpha\delta^2$: $\alpha\beta^2$:: $\alpha\gamma + Ai$: Ai ; & proinde $\alpha\delta$: $\alpha\beta$:: $\sqrt{\alpha\gamma + Ai}$: $\sqrt{Ai}$:: celeritas acquisita in α : celer. acquis. in A :: (ex natura descensus gravium) :: $\alpha\delta$: $A\omega$ (per hyp. quia aequalibus tempusculis transiri supponuntur). Ergo $\alpha\beta = A\omega$. Ergo grave per hanc Curvam latum aequaliter aequalibus temporibus a puncto A recedit. Q. E. D.

Quae hic praecipue observanda veniunt, sunt sequentia:

1. Si grave altius vel humilior, quam ex i , decidere supponatur, puta ex τ , non opus est nova Elastica: Sufficit haec una omnibus Curvis isochronis describendis. Omnes enim inter se similes sunt, determinanturque, faciendo tantum, ut Ai ad $A\tau$, sic $A\alpha$ ad aliam $A\alpha$ abscindendam ex eadem $A\varepsilon$. Estque ipsa curva Schematis nostri constructa pro gravi tanquam ex τ , non i , decedente.

2. Sed & infinitae dantur aliae, quas grave ex eadem altitudine

τA delapsum ita permeare potest, ut aequabiliter ad punctum aliquod accedat vel recedat; at illud continuo diversum ab A ; nec nisi per unicam curvam ex eadem altitudine, respectu ejusdem puncti, accessus vel recessus aequalis effici potest.

3. Curva nostra Isochronos initium capit in ipso puncto A , cujus respectu motus aequalis est, & terminatur in puncto η ejusdem cum illo altitudinis; utraque vero extremitate tangit horizontalem rectam $A\eta$. Unde flexum contrarium habere constat. Quod si ex altera parte statuatur huic similis & aequalis curva $A\lambda\theta\psi$, & grave dimittatur ex η cum celeritate, quam acquirere potest cadendo ex altitudine aequali ipsi τA , illud primo descendendo ad ω , mox reascendendo, aequabiliter ad A accedet, indeque pergendo continue per alteram $A\lambda\theta\psi$ ab eodem puncto A eadem ratione elongabitur.

4. Tangens Curvae in locis intermediis, velut α , reperitur, si ducta $A\mu$ perpendiculari ad $A\alpha$, fiat, ut $\sqrt{A\tau}$ ad $\sqrt{\alpha\gamma}$; ita $A\alpha$ ad $A\mu$; ducta enim $\alpha\mu$ curvam tanget: quod vel ex usu, quem praestare debet curva, facile infertur.

5. Recta $A\eta$ quadrupla est rectae $A\theta$.

6. Si in Elastica punctum Q assumatur tale, ut tertia proportionalis ad subtangentem Pp & rectam AB aequetur curvae AQ , invenietur ejus ope punctum χ portionis $A\chi\theta$, quod omnium maxime distat a perpendiculari $A\theta$.

7. Sin punctum Q ponatur tale, ut tangens Qp aequetur curvae φRQ , illo mediante habebitur in altera punctum ω , omnium infimum & remotissimum ab horizontali $A\eta$.

8. Tandem & hoc advertendum est, quod ex propositi Problematris constructione proclive jam colligere sit, quales suppositiones faciendae, ad reducendam aequationem $(x dx + y dy)\sqrt{y} = (x dy - y dx)\sqrt{a}$. Nam si loco x & y assumantur duae aliae indeterminatae t & z , ponendo $ay = tz$, & $ax = t\sqrt{aa - zz}$; prodibit aequatio, in qua separari possunt indeterminatae t & z cum suis differentialibus a se invicem; quod sufficit ad constructionem deinde, saltem per quadraturas, expediendam. Duo enim in hoc calculo adhuc praecipue desiderari videntur, quae si semper fieri possent, omnia reperta essent; unum ut differentialia secundi altiorumve generum ad differentialia primi reducantur; alterum, ut in aequationibus differentialibus primi

generis indeterminatae, si invicem permixtae sint, a se mutuo separentur, ut unaquaeque cum sua differentiali peculiarem aequationis partem constituat, h. e. ut reperiatur methodus inversa tangentium. Pro utroque dedi Regulas quasdam (pluresque sine fine dare possem) similes illis, quas *Frater Parisiis* apud *Marchionem Hospitalium* deposuit, quibusque methodum inesse initio existimarat. At statim sensi, illas non continere nisi artificia quaedam particularia, quae methodum appellare non ausim, utpote qualem non magis dari posse arbitror, quam dari potest universalis methodus pro construendis Aequationibus Algebraicis quorumvis promiscue graduum. Illa enim (cujus olim in *Actis* mentio facta est) qua pono indefinite $0 = a + bx + cy + exy$, &c. & quaero deinde ejus ope lineae tangentem, vix aliter quam in speculatione succedere videtur. Quod dictis fidem faciat, hoc esto, quod praesens Problema, quanquam ut apparet haud admodum difficile, nullius regulae methodive hactenus repertae ope solvi a quoquam potuerit.